


Master 2 « Outils et systèmes de l'astronomie et de l'espace »

Automatique

Systemes linéaires et asservissement

François Orioux

2018 — 2019

orieux@l2s.centralesupelec.fr
Laboratoire des Signaux et Systemes
3 rue Joliot-Curie, 91 192 Gif-sur-Yvette
CC BY-SA 4.0 

Avant propos

Ce polycopié présente l'essentiel des outils pour l'analyse et la conception de *systèmes linéaires* potentiellement *asservis*, domaine intervenant dans tous les domaines de l'industrie et de la physique. Il contient peu de calculs détaillés et la plupart des figures exposées en cours sont absentes. Il s'agit d'un support qui doit être complété par des notes prises pendant les séances.


Références

- [1] Yves GRANJON. *Automatique. Systèmes linéaires, non linéaires, à temps continu, à temps discret, représentation d'état*. Complet et assez contemporain, il présente l'avantage d'être plutôt concis tout en abordant l'ensemble des concepts de manière concrète, avec exercices. Les espaces d'états sont également abordés. Dunod, 2001.
- [2] Maurice GRIVOIR et Jean-Louis FERRIER. *Cours d'automatique*. Ouvrage de référence en trois tomes avec une édition plus récente. La présentation peut parfois manquer de clarté. Le contenu est exhaustif avec toutes les transformées, les SLIT, la commande analogique et numérique ainsi que l'identification. Eyrolles, 1989.
- [3] Éric OSTERTAG. *Automatique. Systèmes et asservissement continus*. Général et dans le même esprit que l'ouvrage d'Y. GRANJON. L'ouvrage ne présente cependant pas l'automatique numérique. Ellipses, 2004.
- [4] Alok SINHA. *Linear Systems. Optimal and Robust control*. En anglais, son contenu est centré sur le contrôle optimal et robuste. Il s'agit principalement de commandes numériques estimées et non plus conçues de manière *ad-hoc*. C'est l'automatique moderne et pointue. CRC Press, 2007.
- [5] Nicolas PETIT et Pierre ROUCHON. *Automatique. Dynamique et contrôle des systèmes*. Polycopié du cours d'automatique à l'école des Mines de Paris, disponible en ligne. Le polycopié aborde l'ensemble des concepts de l'automatique y compris sur les systèmes non linéaires ou encore l'observabilité. Le niveau de mathématique est exigeant.
- [6] Henri BOURLÈS. *Systèmes linéaires. De la modélisation à la commande*. Ouvrage très complet et offrant un cadre unique et général pour étudier les systèmes analogique et numérique linéaires. Le formalisme est cependant austère et très mathématique en utilisant la théorie des modules de l'algèbre linéaire. Lavoisier, 2006.
- [7] Bernard PICINBONO. *Théorie des signaux et des systèmes avec problèmes résolus*. Paris, France : Dunod Université, 1989.
- [8] Walter APPEL. *Mathématiques pour la physique et les physiciens*. H&K éditions, 2002.

Situations

L'automatique et la théorie des systèmes linéaires invariants fournissent des réponses à ces problèmes.

- Cas 1** Des capteurs refroidis doivent être maintenus à une température nominale. Malheureusement, l'environnement extérieur modifie la température ambiante par l'exposition au soleil ou aux cosmiques. Comment procéder ? (§ 1.5)
- Cas 2** Un satellite géostationnaire doit maintenir son orientation vers un point de la terre. Comment piloter les fusées latérales ? (§ 4.1)
- Cas 3** On doit piloter un moteur à courant continu pour déplacer un télescope. Cependant, le moteur possède une trop grande inertie. Comment rendre le système plus rapide tout en s'assurant à l'avance que les sollicitations ne seront pas trop importantes ? (§ 1.5.2, 4.3.3)
- Cas 4** Le système de déplacement d'une roue à filtre provoque des résonances à chaque changement qui se transmettent aux autres composants. Comment piloter la roue pour amortir ces résonances ? (§ 3.4, 4.2.3)
- Cas 5** Un stagiaire a conçu un système d'optique adaptative. Malheureusement, le système est instable et finit par solliciter exagérément les miroirs. Comment corriger le problème ? (§ 4.2, 5)
- Cas 6** La position réelle d'un satellite que l'on souhaite sur le point L₂, instable, n'est mesurée que par intervalles très espacés. Comment piloter les fusées pour maintenant l'orbite ? (automatique numérique, en cours. . .)

Mis à disposition selon les termes de la Licence Creative Commons Attribution – Partage dans les Mêmes Conditions 4.0 International 

Ce document est également inspiré de celui de P. Bordé que je remercie.

Table des matières

I. Automatique analogique	7
1. Introduction	9
1.1. Histoire et objet de l'automatique	9
1.2. Signaux	9
1.3. Processus	10
1.4. Systèmes	10
1.5. Asservissement	11
2. Systèmes linéaires invariants	13
2.1. Réponse impulsionnelle	13
2.2. Signaux propres	13
2.3. Transformation de Laplace	13
2.4. Fonction de transfert	14
2.5. Réponses temporelles	15
2.6. Réponse en fréquence	15
2.7. Représentations graphiques	15
3. Modèles standards	17
3.1. Modèle du premier ordre	17
3.2. Modèle du second ordre	18
3.3. Régime amorti non résonant du second ordre	19
3.4. Régime amorti résonant du second ordre	20
3.5. Autres régimes du second ordre	20
3.6. Autres modèles	21
4. Asservissement	23
4.1. Systèmes bouclés	23
4.2. Stabilité des systèmes bouclés	23
4.3. Performance	24
5. Commandes analogiques	27
5.1. Objectifs	27
5.2. Méthodologie	27
5.3. Correcteur PID	27
5.4. Autres correcteurs	28
5.5. Correction par ordinateur	28
II. Automatique numérique	31
6. Signaux et systèmes numériques	33
6.1. Signaux	33
6.2. Échantillonnage	33
6.3. Reconstruction	33
6.4. Signaux de base	33
6.5. SLI numériques	33
6.6. Transformation en \mathcal{Z}	34
6.7. Fonction de transfert	34
6.8. Modèles standards	34
7. Asservissement numérique	37
7.1. Introduction	37
7.2. Calcul de la fonction de transfert	37
7.3. Choix de T_e	37
7.4. PID numérique	37
7.5. Forme standard de fonction de transfert	38
7.6. Réponse en fréquence	39
7.7. Stabilité	39
7.8. Précision	39

7.9. Synthèse de correcteur	40
III. Annexes	41
A. Second ordre amorti résonant	43
A.1. Caractéristiques de la réponse indicielle	43
A.2. Caractéristiques du gain fréquentiel	43
B. Décomposition en éléments simples	45
B.1. Division euclidienne	45
B.2. Éléments simples	45
B.3. Décomposition en éléments simples	45
B.4. Exemple	45
C. Le tableau de Routh-Hurwitz	47
D. Lexique français-anglais	49
E. Questions de cours	51

Première partie

Automatique analogique

Chapitre 1.

Introduction

1.1. Histoire et objet de l'automatique

L'automatique est née, tout comme le traitement du signal, au début du 20^e siècle avec les travaux fondateurs d'ingénieurs et mathématiciens tel qu'Harold BLACK, Nathaniel NICHOLS, Hendrik BODE ou encore Harry NYQUIST. La spécificité de l'automatique est l'étude et la conception d'« automatismes », c'est-à-dire de systèmes régulés fonctionnant et se stabilisant seuls, sans l'intervention d'un facteur humain. À ce titre, l'automatique existe depuis l'antiquité avec les aqueducs romains, ou plus récemment avec la régulation des machines à vapeur de WATT.

Cette discipline a pris son essor pour une part grâce à des travaux essentiels, comme sur la stabilité, mais également grâce à l'apparition de l'électronique moderne. L'électronique permet en effet de concevoir et déployer à moindre coût de nombreux systèmes, nécessitant d'être régulés ou permettant d'en réguler d'autres (y compris mécaniques, optiques, thermiques, etc.). Enfin, la micro informatique a permis la conception d'asservissement complexe et sophistiqué mettant en œuvre les notions telles que la « commande optimale » et la « commande robuste ».

L'automatique peut se décliner en plusieurs volets.

Modélisation. La modélisation, effectuée à partir des lois de la physique ou d'observations empiriques, consiste en la mise en équation du système. Cette tâche s'approchant le plus de la physique et du travail de physicien permet d'appréhender et surtout de prédire le fonctionnement du système.

Identification. La modélisation permet de fixer la structure des équations et la valeur de certains paramètres. Parfois, les connaissances *a priori* sont insuffisantes et il faut étudier la réponse du système à des sollicitations pour *identifier* soit un modèle, soit la valeur des paramètres.

Analyse. L'analyse consiste en l'étude aussi complète que possible du fonctionnement du système une fois celui-ci correctement modélisé et identifié. Il en ressort ses propriétés essentielles.

Asservissement. C'est la tâche habituelle attendue de l'automaticien. Il s'agit d'intervenir sur le système pour qu'il fonctionne de la manière souhaitée et ce de manière automatique, sans l'intervention d'un facteur humain.

1.2. Signaux

Les signaux sont les porteurs d'une information et sont transmis ou transportés par des systèmes (ou canaux en télécommunication).

1.2.1. Modèles et classification

On classe les signaux en fonction de plusieurs critères.

- La nature continue ou discrète de la variable. Le temps t est une variable continue. Si la variable est discrète, on parle de signaux *échantillonnés*.
- La nature continue ou discrète de la valeur prise par la fonction. Si la fonction prend des valeurs discrètes, on parle de signaux *quantifiés*.
- Si la variable *et* la valeur sont continues, on parle de signaux *analogiques*.
- Si la variable *et* la valeur sont discrètes, on parle de signaux *numériques*. Ce sont les seuls signaux aisément stockables.

Les signaux sont *toujours* des fonctions prenant leurs valeurs dans \mathbb{R} , \mathbb{C} ou un sous-ensemble si les signaux sont quantifiés.

Signaux analogiques

Les signaux analogiques sont définis sur les variables d'espaces ou du temps. L'automatique analogique s'intéresse le plus souvent aux signaux temporels

$$s \in \mathcal{S} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto s(t). \quad (1.1)$$

Propriétés

Un signal est *causal* si

$$s(t) = 0, \forall t < 0. \quad (1.2)$$

Un signal est *stable* si

$$\int_{\mathbb{R}} |s(t)| dt < +\infty. \quad (1.3)$$

Un signal est *périodique* de période T si

$$s(t + T) = s(t). \quad (1.4)$$

1.2.2. Signaux usuels

On définit les signaux de base suivants.

Distribution de Dirac

Le Dirac δ est un opérateur linéaire d'échantillonnage

$$\int s(t)\delta(t - \tau) dt = s(\tau).$$

Le Dirac est une distribution. On utilise, quoiqu'abusivement, la pseudo fonction de Dirac

$$\delta(t) \equiv \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

qui permet de s'affranchir de l'intégrale. Cette notation est « valide » si les signaux utilisant la pseudofonction de Dirac sont, au final, à l'intérieur d'intégrales, ce qui est presque toujours le cas.

Fonction échelon ou Heaviside

L'échelon $u(t)$ de niveau U est défini comme

$$u(t) = \begin{cases} U & t \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'échelon unité est l'intégration d'un Dirac

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(v) dv.$$

Fonction rampe

La rampe $r(t)$ de pente v est définie comme

$$r(t) = \begin{cases} vt & t \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

C'est l'intégration d'un échelon unité

$$r(t) = \int_{-\infty}^t u(v) dv.$$

Exponentielle complexe et cissoïde

Les exponentielles complexes

$$e^{pt} \quad \text{avec} \quad p \in \mathbb{C}$$

sont majeures en théorie des signaux et systèmes. Elles sont reliées à la linéarité et l'invariance des systèmes ou encore à l'analyse harmonique et la transformation de Fourier. La cissoïde est l'exponentielle complexe pour $p = i\omega$ purement imaginaire

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t) \quad \text{avec} \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

1.3. Processus

En automatique on souhaite modéliser et asservir des processus. Un processus est composé

- d'un *système*, c'est-à-dire l'ensemble plus ou moins complexe des composants en interaction,
- de *capteurs* utilisés pour observer le système et fournissant les *sorties* $s(t)$, signaux images des grandeurs régulées,
- d'*actionneurs* permettant d'agir sur le système et pilotés par les *entrées* ou *commandes* $k(t)$,
- et des *perturbations* $p(t)$, non voulues, indépendantes des commandes et qui influent sur le comportement du système.

Exemples d'un cryostat

- commande : une température cible.
- actionneur : un courant électrique, un liquide cryogénique.
- mesures : un « thermomètre ».
- perturbations : les variations de la température extérieure, activité ou exposition au soleil.

Exemple d'un lanceur

- commande : une trajectoire.
- actionneurs : le réacteur ou son alimentation en carburant.
- mesures : une centrale inertielle, un GPS.
- perturbations : les turbulences de l'atmosphère.

1.4. Systèmes

Dans le sens commun, un système est un ensemble de processus, naturels ou artificiels. Au sens strict c'est un opérateur fonctionnel, prenant un signal en entrée et délivrant un autre signal en sortie. On le note $\mathcal{H} : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{S}$ avec \mathcal{K} et \mathcal{S} des ensembles de signaux. L'automatique analogique s'intéresse aux systèmes

1. analogiques,
2. mono variables, habituellement le temps,
3. linéaires et invariants.

1.4.1. Forme générale et linéarisation

Toute modélisation, faisant le plus souvent intervenir des équations différentielles, aboutit à une représentation des phénomènes par un modèle, c'est-à-dire un ensemble d'équations régissant le fonctionnement du système. À tout modèle est associé un domaine de validité dans lequel ce dernier est jugé fiable et utile.

Des non-linéarités sont souvent présentes, comme des seuils, des saturations, des hystérésis et toute fonction non linéaire. Pour exploiter la théorie des systèmes linéaires, il faut procéder à une linéarisation. Pour un modèle

$$s(t) = \mathcal{H}(k(t))$$

1. on néglige toutes les contraintes ou structures non linéaires,
2. on définit un point de fonctionnement stationnaire (k, s) ,
3. on procède au développement de Taylor à l'ordre un

$$s(t) - s \approx \mathcal{H}^{(1)}(k(t) - k).$$

Le terme $\mathcal{H}^{(1)}$, ou la pente, est appelé *gain statique*.

4. on injecte éventuellement le résultat de la linéarisation dans l'équation différentielle d'origine pour établir le régime dynamique.

1.4.2. Linéarité et invariance

Tous les systèmes étudiés en automatique analogique possèdent les propriétés fondamentales de linéarité et d'invariance.

Linéarité

Soient deux scalaires et deux signaux

$$(a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad (k_1, k_2) \in \mathcal{K},$$

avec, pour un système \mathcal{H} ,

$$s_1 = \mathcal{H}(k_1) \quad \text{et} \quad s_2 = \mathcal{H}(k_2).$$

Le système est linéaire si

$$\begin{aligned} s &= \mathcal{H}(ak_1 + bk_2) \\ &= as_1 + bs_2. \end{aligned}$$

La linéarité est essentielle et correspond au principe de superposition en physique. Son utilité est évidente.

Invariance

Soit, pour un système \mathcal{H} ,

$$s(t) = \mathcal{H}(k(t)).$$

Le système est invariant si

$$s(t - \tau) = \mathcal{H}(k(t - \tau)).$$

L'invariance suppose que le comportement du système ne change pas.

Régimes de fonctionnement

On analyse le plus souvent les sorties des systèmes en différents régimes.

- Le régime *statique*, lorsque la sortie est constante.
- Le régime *permanent*, lorsque la sortie est constante ou périodique.
- Le régime *transitoire*, lorsque le système est en train de s'adapter à une nouvelle entrée et tend vers le régime permanent.

Le régime statique est un régime permanent, l'inverse est faux.

1.5. Asservissement

Pour qu'un système se comporte comme souhaité, soit on lui porte une confiance aveugle après conception, soit on l'observe pour adapter la commande en fonction des attentes.

1.5.1. Commande en boucle ouverte, boucle fermée

La consigne $c(t)$ est la grandeur que l'on souhaiterait observer en sortie du système.

La commande en *boucle ouverte* (BO) consiste à fabriquer et régler le système de telle sorte que, *a priori*, la sortie $s(t)$ soit égale à la consigne pour une commande (entrée) $k(t)$ prédéterminée. C'est une commande en aveugle, sans *feedback*. Elle est affectée des erreurs de modélisation, mais également des perturbations ou évolutions du système au cours du temps.

Si l'on considère que notre connaissance est imparfaite ou qu'il y a des aléas, alors l'observation de la sortie et sa comparaison à la consigne conduisent à la commande en *boucle fermée* (BF).

On place alors un dispositif, le *régulateur* ou *correcteur*, qui compare la consigne et la sortie et fabrique le signal de commande envoyé au système. Le régulateur peut être un être humain. L'automatique s'attache à remplacer l'humain par un système \mathcal{R} . On définit alors plusieurs grandeurs

- la consigne $c(t)$ et les perturbations $p(t)$,
- la sortie $s(t) = \mathcal{H}(k(t))$,
- l'erreur ou l'écart à la consigne $e(t) = c(t) - s(t)$,
- le régulateur, ou correcteur, \mathcal{R} ,
- l'entrée ou la commande $k(t) = \mathcal{R}(e(t))$.

Le fonctionnement général se devine bien. Si le processus est à l'équilibre et délivre une sortie correspondant à la consigne alors l'erreur est nulle $e(t) = 0$ et on ne sollicite pas le processus. Lorsque la sortie diffère de la consigne on a $e(t) \neq 0$ et le système est sollicité dans un sens ou dans l'autre.

1.5.2. Critères de qualité

La stabilité

Un système est stable si la sortie est bornée lorsque l'entrée est bornée. Si la réponse impulsionnelle, présentée partie 2.1, est stable (§ 1.2.1), alors le système correspondant est nécessairement stable. Un système peut être stable en BO et instable en BF ou n'importe quelle autre combinaison.

La précision

La précision correspond à l'erreur entre la sortie et la consigne, soit

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) - c(t).$$

L'erreur de position correspond à une erreur constante.

La rapidité

On s'intéresse habituellement au temps de réponse à un changement de consigne. Le plus courant est le temps nécessaire pour atteindre une erreur de 5%, appelé le temps de réponse. L'asservissement peut modifier la rapidité apparente d'un processus.

1.5.3. Objectifs de l'automatique

L'automatique a comme objectifs usuels

- la *poursuite* : faire en sorte que la sortie $s(t)$ suive au mieux la consigne $c(t)$ qui évolue.
- la *régulation* ou *réjection* des perturbations : faire en sorte que la sortie $s(t)$ suive au mieux une consigne statique c en présence de perturbations $p(t)$.
- la correction de défauts des systèmes, comme stabiliser un système en BF instable en BO.
- l'amélioration des performances apparentes des systèmes.

Chapitre 2.

Systemes linéaires invariants

Les systemes linéaires invariants (SLI) sont reliés aux équations différentielles à coefficients constants

$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m k(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{dk(t)}{dt} + b_0 k(t) \quad (2.1)$$

avec les signaux $k, s \in \mathcal{S}$ et $a_i, b_j \in \mathbb{R} \forall i, j$. Le caractère linéaire et invariant provient de la linéarité et de l'invariance de la différentielle.

Les SLI sont caractérisés par différentes réponses, toutes étant reliées entre elles :

- les réponses temporelles (soit impulsionnelle, indicielle, en vitesse, etc.),
- la fonction de transfert,
- la réponse en fréquence.

2.1. Réponse impulsionnelle

Pour tous les SLI on montre que la relation entre l'entrée et la sortie est une opération de convolution (commutative)

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(u)h(t-u) du \quad (2.2)$$

où $h(t)$ est appelée la *réponse impulsionnelle* (RI) soit la réponse à une impulsion de Dirac.

Un SLI est entièrement caractérisé par sa RI. Par principe de causalité, les réponses impulsionnelles sont *toujours* causales

$$h(t) = 0, \forall t < 0.$$

Dans le cas contraire, le système est capable de prédire l'avenir et n'est donc pas réel ou ne peut pas être mis en œuvre. On dit qu'il est *non causal*.

2.2. Signaux propres

La relation de convolution fait apparaître un caractère essentiel.

Théorème 1. Les exponentielles complexes $e^{pt}, p \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}$, sont les vecteurs propres des SLI.

En effet

$$\begin{aligned} s(t) &= \mathcal{H}(e^{pt}) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)e^{p(t-u)} du \\ &= H(p) \cdot e^{pt} \end{aligned}$$

avec $H(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)e^{-pu} du \in \mathbb{C}$, la valeur propre associée à e^{pt} .

Définition 1. La fonction $H(p)$

$$H : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ p \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-pt} dt \quad (2.3)$$

est appelée fonction de transfert du SLI et est la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle.

2.3. Transformation de Laplace

La transformation de Laplace (TL) est une application linéaire sur une fonction. Les réponses impulsionnelles étant toujours causales, on s'intéresse uniquement à la TL unilatérale.

Définition 2. Soit $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ causale, localement sommable, alors la transformation de Laplace \mathcal{L} est une application linéaire

$$\mathcal{L} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y} \\ f(t) \mapsto F(p) \quad (2.4)$$

avec $F(p) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt \quad (2.5)$$

et existe si et seulement si

$$\sigma > \sigma_0 \in \mathbb{R}$$

avec $p = \sigma + i\omega$.

Dans le cas où $f(t)$ est une RI, on retrouve la fonction de transfert, déjà définie comme la transformée de Laplace. La fonction F est l'image de f ou la transformée. De même f est l'originale de F . L'équation (2.4) est un « système formel » puisqu'elle associe un signal à un autre signal.

L'intégrale de l'équation (2.5) a une condition de convergence σ_0 sur la partie réelle σ de $p = \sigma + i\omega$. Il faut en effet

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |f(t)e^{-pt}| = \lim_{t \rightarrow +\infty} |f(t)e^{-\sigma t}| = 0$$

soit que l'exponentielle décroisse plus rapidement qu'une croissance éventuelle de la fonction pour que l'intégrale ait une limite. On parle

- d'abscisse de sommabilité pour σ_0 ,
- de région de convergence $R : \sigma > \sigma_0$,
- de demi-plan à droite de σ_0 .

La région de convergence peut aller de l'ensemble \mathbb{C} (tout le plan complexe) si $\sigma_0 \rightarrow -\infty$ à l'ensemble vide (rien) si $\sigma_0 \rightarrow +\infty$.

2.3.1. Propriétés

Soit la fonction $f(t)$ et sa transformée de Laplace $F(p)$ de région de convergence σ_0 . On dispose des propriétés suivantes.

Décroissante, régularité. Le contenu diminue avec p croissant

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} F(p) = 0.$$

Translation. Un décalage temporel est un déphasage dans \mathcal{L}

$$f(t - \tau) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(p)e^{-\tau p} \quad \text{avec } \sigma > \sigma_0 - \tau,$$

et inversement

$$f(t)e^{at} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(p - a) \quad \text{avec } \sigma > \sigma_0 + \Re(a).$$

Dilatation. Une dilatation temporelle est une contraction dans \mathcal{L}

$$f(ct) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{c} F\left(\frac{p}{c}\right) \quad \text{avec } c \in \mathbb{R}_+^*.$$

Convolution. Une convolution temporelle est un produit dans \mathcal{L}

$$\int f(u)g(t - u) du \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(p)G(p)$$

avec $\sigma > \sup(\sigma_f, \sigma_g)$.

Intégration. Une intégration temporelle est une division par p dans \mathcal{L}

$$\int_0^t f(t) dt \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{F(p)}{p} \quad \text{avec } \sigma > \sup(0, \sigma_0).$$

Dérivation. Une dérivation temporelle est un produit par p dans \mathcal{L}

$$f^{(n)}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} p^n F(p) - p^{n-1} f(0^+) \dots - f^{(n-1)}(0^+).$$

On suppose le plus souvent l'équilibre, soit $f^{(n)}(0^+) = 0$, ce qui donne

$$\frac{d^n f}{dt^n} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} p^n F(p)$$

Cette propriété est majeure pour l'étude des équations différentielles. On a inversement

$$\frac{d^n F}{dp^n} = \int_0^{+\infty} (-t^n) f(t) e^{-pt} dt.$$

Théorèmes de la valeur finale et initiale. On relie les valeurs en 0 et $+\infty$ entre f et F

$$\begin{aligned} f(+\infty) &= \lim_{p \rightarrow 0} pF(p), \\ f(0^+) &= \lim_{p \rightarrow +\infty} pF(p). \end{aligned}$$

Transformation de Fourier. Si on limite p à l'axe imaginaire $p = i\omega$ avec $\omega \in \mathbb{R}$ la pulsation¹ alors la transformée de Laplace unilatérale est équivalente à la transformée de Fourier de signaux causaux

$$F(p) = F(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

si l'axe imaginaire est dans la région de convergence.

1. ou la fréquence ν telle que $2\pi\nu = \omega$.

Inversion. L'inversion, ou le calcul de l'original f connaissant F , s'avère délicat. Il faut procéder à une intégration pour p le long d'une droite parallèle à l'axe imaginaire, dans la région de convergence,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} : \mathcal{Y} &\rightarrow \mathcal{X} \\ F(p) &\mapsto f(t) \end{aligned}$$

avec

$$f(t) = \frac{1}{i2\pi} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} F(p)e^{pt} dp.$$

2.3.2. Transformées usuelles

— Dirac

$$\delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} 1.$$

— Dirac translaté

$$\delta(t - \tau) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} e^{-p\tau}.$$

— Échelon

$$k(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{p} \quad \text{avec } \sigma > 0.$$

— Puissance

$$t^n \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{n!}{p^{n+1}} \quad \text{et donc } t \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{p^2}.$$

— Exponentielle

$$\begin{aligned} e^{\alpha t} &\xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{p - \alpha} \quad \text{avec } \sigma > \alpha, \\ 1 - e^{-t/T} &\xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{p(1 + Tp)}. \end{aligned}$$

— Peigne de Dirac causal

$$\sqcup\sqcup_T(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{1 - e^{-Tp}}.$$

— Cosinus / sinus

$$\cos(\omega t) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}, \quad \text{et } \sin(\omega t) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

2.4. Fonction de transfert

Pour les SLI, la relation entre l'entrée et la sortie est une équation différentielle définie (2.1). En appliquant la transformation de Laplace et la propriété de dérivation, on obtient

$$\begin{aligned} a_n p^n S(p) + \dots + a_1 p S(p) + a_0 S(p) = \\ b_m p^m K(p) + \dots + b_1 p K(p) + b_0 K(p) \end{aligned}$$

soit

$$H(p) = \frac{S(p)}{K(p)} = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0}. \quad (2.6)$$

On appelle la fraction rationnelle $H(p)$ la fonction de transfert du SLI déjà introduite définition 1 page 13.

Propriété 1. L'ordre n d'un système est le degré du dénominateur. Un système où le degré du numérateur est supérieur au dénominateur, $m > n$, n'est pas réalisable en pratique, car non causal.

En posant

$$\boxed{S(p) = H(p)K(p)} \quad (2.7)$$

et en exploitant la propriété de convolution de la TL on retrouve la sortie comme la convolution temporelle entre l'entrée et la réponse impulsionnelle

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(u)h(t-u) du \quad (2.8)$$

où H, K et S sont les TL de h, k et s respectivement. **On retiendra :**

1. On obtient *aisément* la fonction de transfert (FT) à partir de l'équation différentielle.
2. La FT et la RI sont duales l'une de l'autre par transformation de Laplace (définition 1 page 13),

$$h(t) \xrightleftharpoons[\mathcal{L}^{-1}]{\mathcal{L}} H(p). \quad (2.9)$$

3. La réponse d'un SLI est une convolution dans l'espace réel (temporelle) et un *produit* dans l'espace de Laplace.

2.5. Réponses temporelles

En plus de la RI et de la FT, on s'intéresse à deux réponses types des SLI, particulièrement en automatique.

2.5.1. La réponse indicielle

La réponse indicielle $i(t)$ est la réponse à un changement d'indice ou à un échelon d'amplitude E

$$\begin{aligned} i(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} u(v)h(t-v) dv \\ &= E \int_0^{+\infty} h(t-v) dv. \end{aligned}$$

Cette réponse correspond à un changement de consigne.

2.5.2. La réponse en vitesse

La réponse en vitesse $r(t)$ est la réponse à une rampe de pente v

$$r(t) = v \int_0^{+\infty} uh(t-u) du.$$

Cette réponse correspond à une consigne évoluant linéairement.

2.6. Réponse en fréquence

Si l'axe imaginaire $i\omega$ est dans les régions de convergences (ou que les signaux aient une transformée de Fourier), la restriction de la fonction de transfert à l'axe imaginaire est appelée *réponse en fréquence* $H(i\omega)$. C'est la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle

$$H(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-i\omega t} dt \quad \text{pour } \omega \in \mathbb{R}. \quad (2.10)$$

On dit que les SLI sont des *filtres linéaires* puisque

$$S(i\omega) = H(i\omega)E(i\omega) \quad (2.11)$$

est un filtrage de chaque composante fréquentielle présente dans E par H .

En d'autres termes, la réponse en fréquence, ou réponse harmonique, est la réponse du système lorsque l'entrée est une sinusoïde. Dans ce cas la sortie est également une sinusoïde à la *même fréquence* ω , avec une *amplitude* et une *phase différentes* données par $H(i\omega)$. C'est un résultat identique au théorème 1 des vecteurs propres page 13.

2.7. Représentations graphiques

Les réponse en fréquence prenant leur valeur dans \mathbb{C} , plusieurs possibilités existent pour des usages différents. En partant de l'équation (2.11) on définit le gain

$$\boxed{|H(i\omega)| = \frac{|S(i\omega)|}{|E(i\omega)|}}$$

et le *déphasage*

$$\boxed{\arg H(i\omega) = \arg S(i\omega) - \arg E(i\omega)}.$$

2.7.1. Diagramme de Bode

Le diagramme de Bode représente, sur deux graphes séparés,

1. le gain en décibels soit $20 \log_{10}(|H(i\omega)|)$,
2. et le déphasage $\arg H(i\omega)$

en fonction de $\log(\omega)$ en abscisse. Le diagramme de Bode, par la présence du logarithme, possède une linéarité ; si $H = H_1 \cdot H_2$ alors

$$\begin{aligned} |H(i\omega)|_{\text{dB}} &= |H_1(i\omega)|_{\text{dB}} + |H_2(i\omega)|_{\text{dB}}, \\ \arg H(i\omega) &= \arg H_1(i\omega) + \arg H_2(i\omega). \end{aligned}$$

Le diagramme de Bode est utilisé pour étudier le comportement fréquentiel. Il peut se construire aisément, quelle que soit la complexité du système, par l'étude asymptotique (voir par exemple [1]).

2.7.2. Diagramme de Nyquist

Le diagramme de Nyquist est un graphe *paramétrique* en ω de la partie réelle $\Re[H(i\omega)]$ en fonction de la partie imaginaire $\Im[H(i\omega)]$. Toute l'information est présente dans un seul graphe.

On retrouve le module et la phase, à la pulsation ω , avec la distance et l'angle du lieu

$$\left(\Re[H(i\omega)], \Im[H(i\omega)] \right)$$

à l'origine.

Le diagramme de Nyquist est utile pour étudier la *stabilité* d'un système en *boucle fermée* à partir de sa réponse en *boucle ouverte*.

2.7.3. Diagramme de Black-Nichols

Le diagramme de Black est un graphe *paramétrique* en ω du module $|H(i\omega)|$ en fonction de la phase $\arg H(i\omega)$. Toute l'information est présente dans un seul graphe également.

Ce diagramme est aussi utile pour étudier la *stabilité* d'un système lorsqu'il sera mis en BF connaissant sa réponse en BO. Il aide à la synthèse de correcteurs.

L'abaque de Black-Nichols permet également, avec son double système de coordonnées, de tracer la réponse en BO sur les axes rectilignes et de lire la réponse en BF sur les axes curvilignes.

Chapitre 3.

Modèles standards

La partie 2.4 montre que les systèmes ont leur fonction de transfert sous la forme de fraction rationnelle de polynômes

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0}$$

où N et D sont respectivement les numérateurs et dénominateur. Le théorème fondamental de l'algèbre stipule que tout polynôme de degré n possède exactement n racines complexes. On dispose donc également d'une forme factorisée générale

$$H(p) = K \frac{\prod_i (p - z_i)}{\prod_k (p - p_k)} \quad (3.1)$$

où K est un gain, z_i les racines du numérateur, appelées *zéros* de H et p_i les racines du dénominateur, appelées *pôles* de H .

Les racines sont soit réelles, soit complexes et dans ce deuxième cas conjuguées l'une de l'autre. Par décomposition en éléments simples, voir annexe B, on en déduit que tous les systèmes se réduisent à l'étude des systèmes d'ordre un et deux.

3.1. Modèle du premier ordre

Le modèle du premier ordre est le plus courant et le plus simple. Son fonctionnement est régi par deux paramètres seulement et ne possède qu'un seul régime. Par ailleurs, il est toujours stable.

3.1.1. Équation générale

La relation d'entrée-sortie du modèle du premier ordre intégrateur est l'équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficient constant

$$T\dot{s}(t) + s(t) = Gk(t) \quad (3.2)$$

où $T \in \mathbb{R}^+$ est appelé constante de temps et $G \in \mathbb{R}$ le gain statique. On appelle système normalisé, un système de constante de temps $T = 1$ et de gain $G = 1$.

3.1.2. Fonction de transfert

La fonction de transfert s'obtient par transformation de Laplace de l'équation (3.2) soit

$$T [pS(p) - s(0^+)] + S(p) = GK(p).$$

Pour un système *partant du repos*¹, i.e. $s(0^+) = 0$, on a

$$H(p) = \frac{S(p)}{K(p)} = \frac{G}{1 + Tp}. \quad (3.3)$$

La fonction de transfert possède un unique pôle $p = -\frac{1}{T}$, toujours réel négatif (par définition $T > 0$).

1. ou à l'équilibre.

3.1.3. Réponse impulsionnelle

Pour une impulsion d'aire A nous avons $k(t) = A\delta(t)$ soit

$$S(p) = \frac{GA}{1 + Tp}$$

et par conséquent

$$h(t) = \frac{GA}{T} e^{-\frac{t}{T}} u(t) \quad (3.4)$$

avec $u(t)$ l'échelon unité. La réponse est tracée figure 3.1.

La valeur résiduelle au bout de $2,3T$ est de 10% et au bout de $3T$ de 5%. La pente en 0^+ – dit à l'origine – est $-GA/T^2$.

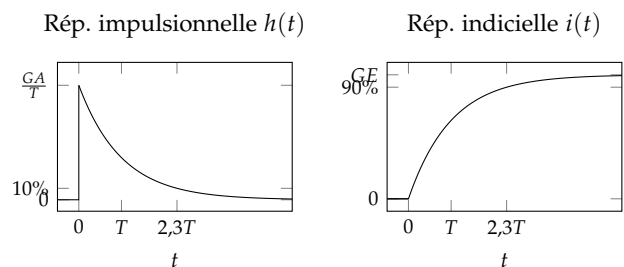


Figure 3.1. – Réponse impulsionnelle et indicielle à une impulsion d'aire A du modèle du premier ordre de cst. de temps T .

3.1.4. Réponse indicielle

Avec comme entrée $k(t) = Eu(t)$ nous avons

$$S(p) = \frac{GE}{p(1 + Tp)}$$

et par conséquent

$$i(t) = GE \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) u(t). \quad (3.5)$$

La réponse est tracée figure 3.1. Le tableau 3.1 présente quelques valeurs remarquables de valeur résiduelles. La pente en 0^+ est GE/T .

Table 3.1. – Temps de montée pour la réponse à un échelon du modèle du premier ordre de constante de temps T .

t	T	$2,3T$	$3T$	$4T$
$\frac{s(t)}{s(+\infty)}$	63%	90%	95%	98%

3.1.5. Réponse en fréquence

La réponse en fréquence s'obtient à partir de la fonction de transfert en limitant p à l'axe imaginaire i.e., $p = i2\pi\nu = i\omega$,

$$H(i\omega) = \frac{G}{1 + iT\omega}. \quad (3.6)$$

On définit la pulsation de coupure comme

$$\omega_c = \frac{1}{T} = 2\pi\nu_c. \quad (3.7)$$

À cette fréquence on a

$$H(i\omega = i\omega_c) = \frac{1}{\sqrt{2}} \equiv -3\text{dB}.$$

3.1.6. Diagrammes d'un système normalisé

Pour un système normalisé

$$H(i\omega) = \frac{1}{1 + i\omega}$$

nous avons les expressions du module

$$|H(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2}},$$

et de la phase

$$\arg H(i\omega) = \phi = -\arctan(\omega).$$

Le diagramme de Bode pour un passe-bas du premier ordre est illustré figure 3.2. Les asymptotes à l'origine $|H| \rightarrow 0$ et à l'infini $|H| \rightarrow -20 \log(\omega)$ se croisent en ω_c .

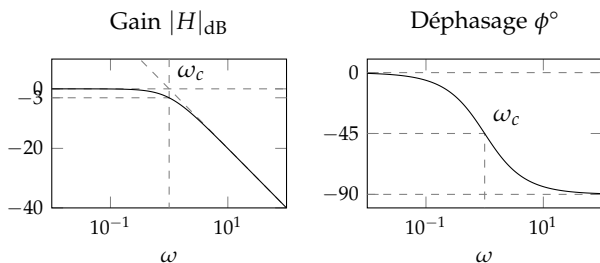


Figure 3.2. – Diagramme de Bode du modèle du premier ordre normalisé.

Le diagramme de Nyquist est représenté sur la figure 3.3. Avec la partie réelle

$$\Re[H] = \frac{1}{1 + \omega^2},$$

et la partie imaginaire

$$\Im[H] = -\frac{\omega}{1 + \omega^2}.$$

Dans le diagramme de Nyquist, on retrouve respectivement le gain et la phase par la longueur du lieu et l'angle avec l'axe réel.

Le diagramme de Black est représenté figure 3.4. On retrouve les asymptotes en 0 et $+\infty$.

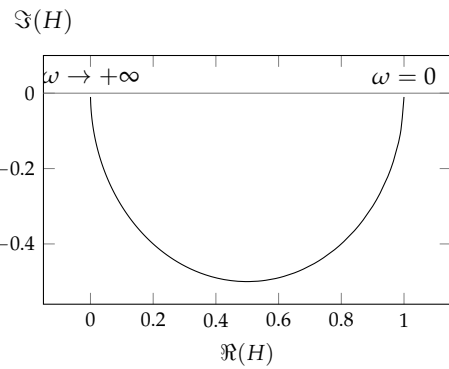


Figure 3.3. – Diagramme de Nyquist du modèle du premier ordre normalisé.

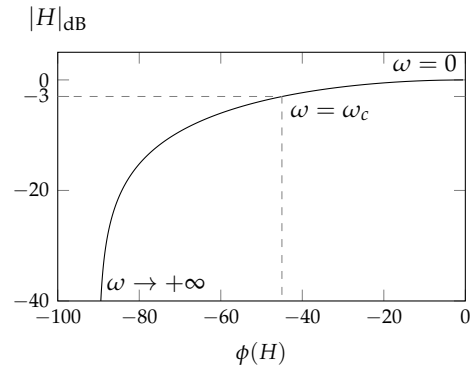


Figure 3.4. – Diagramme de Black du modèle du premier ordre normalisé.

3.2. Modèle du second ordre

Le modèle du second ordre est plus complexe, mais également très courant. Il est souvent le modèle cible, fixé par cahier des charges, pour la synthèse de système à boucle fermée. Son fonctionnement est régi par trois paramètres et possède plusieurs régimes. Il peut être sujet aux oscillations ou phénomène de résonance et devenir instable.

3.2.1. Équation générale

La relation d'entrée–sortie du modèle du second ordre intégrateur est l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficient constant

$$\ddot{s}(t) + 2\zeta\omega_0\dot{s}(t) + \omega_0^2s(t) = G\omega_0^2k(t) \quad (3.8)$$

où $\zeta \in \mathbb{R}$ est le facteur d'amortissement, $\omega_0 \in \mathbb{R}^+$ la pulsation propre et $G \in \mathbb{R}$ le gain statique.

3.2.2. Fonction de transfert

La fonction de transfert, pour un système partant du repos i.e., $s(0^+) = 0$, s'obtient avec la TL de l'équation (3.8) soit

$$(p^2 + 2\zeta\omega_0p + \omega_0^2)S(p) = G\omega_0E(p)$$

puis

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{G\omega_0^2}{p^2 + 2\zeta\omega_0p + \omega_0^2}.$$

Le polynôme $D(p)$ au dénominateur étant d'ordre deux, le discriminant du dénominateur

$$\Delta = 4\omega_0^2 (\zeta^2 - 1)$$

dépend de ζ , ce qui conduit à deux pôles pour H

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}.$$

En fonction de la valeur de ζ les pôles peuvent donc être réels ou complexes et leur partie réelle peut être positive ou négative, conduisant à cinq régimes de fonctionnement.

La forme normalisée s'écrit

$$H(x) = \frac{1}{1 - x^2 + i\frac{x}{Q}}$$

avec $x = \omega/\omega_0$, $G = 1$ et $Q = \frac{1}{2\zeta}$ le facteur de qualité.

3.3. Régime amorti non résonant du second ordre

Ce régime, également appelé *régime apériodique*, correspond à $\zeta \geq 1$. Dans ce cas H possède deux pôles simples réels négatifs

$$p_{1,2} = \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right) \omega_0.$$

Le système correspond à deux systèmes du *premier ordre* en cascade. Dans ce cas de figure, le facteur d'amortissement est tel que les oscillations dues à la résonance du système sont totalement amorties.

3.3.1. Fonction de transfert

La fonction de transfert devient

$$\begin{aligned} H(p) &= \frac{G\omega_0^2}{(p - p_1)(p - p_2)} \\ &= \frac{G\omega_0^2}{p_1 - p_2} \left[\frac{1}{p - p_1} - \frac{1}{p - p_2} \right] \end{aligned}$$

ce qui donne

$$H(p) = \frac{G\omega_0^2}{p_1 - p_2} \left[\frac{1}{p - p_1} - \frac{1}{p - p_2} \right]. \quad (3.9)$$

On pose les constantes de temps

$$T_1 = -\frac{1}{p_1} \quad \text{et} \quad T_2 = -\frac{1}{p_2}$$

soit

$$H(p) = \frac{G\omega_0^2 T_1 T_2}{T_1 - T_2} \left[\frac{T_1}{1 + T_1 p} - \frac{T_2}{1 + T_2 p} \right].$$

3.3.2. Réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle $h(t)$ s'écrit également soit avec les pôles

$$h(t) = \frac{G\omega_0^2}{p_1 - p_2} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) u(t), \quad (3.10)$$

soit sous les formes

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{G\omega_0^2 T_1 T_2}{T_1 - T_2} \left(e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}} \right) u(t) \\ &= \frac{G\omega_0}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} \operatorname{sh} \left(\sqrt{\zeta^2 - 1} \omega_0 t \right) e^{-\zeta \omega_0 t} u(t). \end{aligned} \quad (3.11)$$

La réponse impulsionnelle est illustrée figure 3.5. On observe que plus ζ est important, plus le système a de l'inertie.

3.3.3. Réponse indicielle

De même, la réponse indicielle $i(t)$ s'écrit

$$i(t) = G \left[1 + \frac{\omega_0^2}{p_1^2 - \omega_0^2} e^{p_1 t} + \frac{\omega_0^2}{p_2^2 - \omega_0^2} e^{p_2 t} \right] u(t) \quad (3.12)$$

ou encore sous les formes

$$\begin{aligned} i(t) &= G \left[1 + \frac{\omega_0^2 T_1^2}{1 - \omega_0^2 T_1^2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{\omega_0^2 T_2^2}{1 - \omega_0^2 T_2^2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right] u(t) \\ &= G \left[1 - \frac{\operatorname{sh} \left(\sqrt{\zeta^2 - 1} \omega_0 t + \phi \right)}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-\zeta \omega_0 t} \right] u(t) \end{aligned}$$

avec $\phi = \operatorname{argch}(\zeta)$. La réponse indicielle est illustrée figure 3.5.

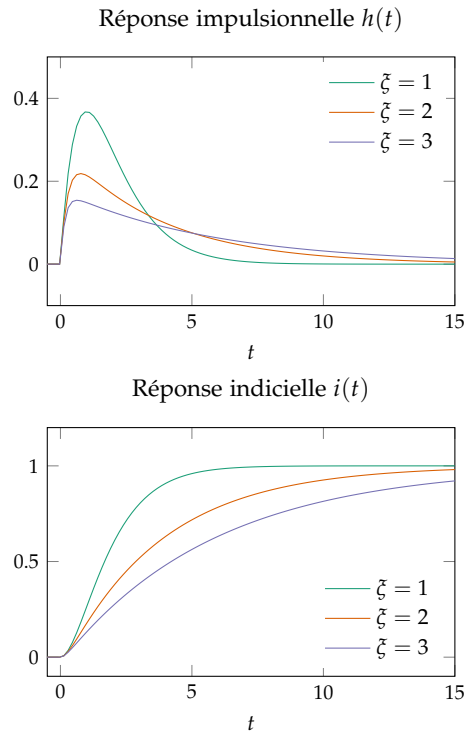


Figure 3.5. – Réponse impulsionnelle et indicielle du modèle du second ordre normalisé amorti non résonant ($\zeta \geq 1$).

3.3.4. Régime amorti critique

Dans le cas où $\zeta = 1$, les pôles sont identiques, les constantes de temps également, et on a

$$T = \frac{1}{\omega_0}.$$

Le système correspond à deux premiers ordres en cascade de même constante de temps. La fonction de transfert devient

$$H(p) = \frac{G}{(1 + Tp)^2}.$$

La réponse impulsionnelle s'écrit

$$h(t) = G\omega_0^2 t e^{-\omega_0 t} u(t).$$

et la réponse indicielle

$$i(t) = G (1 - (1 + \omega_0 t) e^{-\omega_0 t}) u(t).$$

Ce régime, à la limite de la résonance, est le plus rapide sans dépassement. L'absence de dépassement est très recherchée dans certains asservissements.

3.3.5. Pôle dominant

Par décomposition en éléments simple on a

$$H(p) = \frac{K_1}{1 + T_1 p} + \frac{K_2}{1 + T_2 p}$$

avec

$$K_1 = \frac{G_0 \omega_0^2 T_1^2 T_2}{T_1 - T_2} \quad \text{et} \quad K_2 = \frac{G_0 \omega_0^2 T_2^2 T_1}{T_2 - T_1}.$$

Si $\zeta \rightarrow +\infty$ alors $p_1 \rightarrow 0$, donc s'approche de l'axe imaginaire, et $p_2 \rightarrow -\infty$. Par conséquent on a $T_1 \gg T_2$ et p_1 est appelé pôle *dominant*. On peut alors approximer le système par un modèle d'ordre 1 avec

$$H(p) \approx \frac{K_1}{1 + T_1 p} \quad \text{où} \quad T_1 \approx \frac{2\zeta}{\omega_0} = \frac{1}{Q\omega_0}.$$

3.4. Régime amorti résonant du second ordre

Ce régime, également appelé *pseudopériodique*, correspond à $0 < \zeta < 1$. Dans ce cas H possède deux pôles simples complexes conjugués

$$p_{1,2} = \left(-\zeta \pm i\sqrt{1 - \zeta^2} \right) \omega_0$$

et la fonction de transfert s'écrit

$$\begin{aligned} H(p) &= \frac{G\omega_0^2}{(p - p_1)(p - p_2)} \\ &= \frac{G\omega_0^2}{2i\Im(p_1)} \left[\frac{1}{p - p_1} - \frac{1}{p - p_1^*} \right]. \end{aligned}$$

Le système ne peut pas être vu comme deux systèmes du premier ordre et l'analyse doit se faire globalement.

Si $\zeta \rightarrow 0$ alors $\Re[p_{1,2}] \rightarrow 0$ et $\Im[p_{1,2}] \rightarrow \omega_0$. Les pôles s'approchent de l'axe imaginaire.

3.4.1. Réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle devient

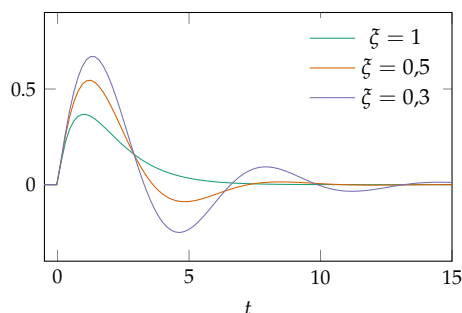
$$h(t) = \frac{G\omega_0^2}{2i\Im(p_1)} \left(e^{p_1 t} - e^{p_1^* t} \right) u(t)$$

ou encore

$$h(t) = \frac{G\omega_0}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin\left(\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_0 t\right) e^{-\zeta\omega_0 t} u(t). \quad (3.13)$$

La réponse est tracée figure 3.6. Le sinus modélise les oscillations, l'exponentielle décroissante l'amortissement. Plus ζ est faible, plus la partie réelle des pôles $-\zeta\omega_0$ est proche de zéro, moins il y a d'amortissement, plus le système oscille longtemps.

Réponse impulsionnelle $h(t)$



Réponse indicielle $i(t)$

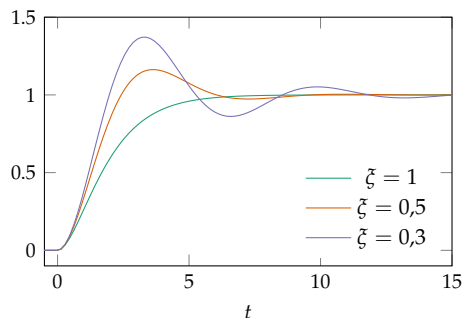


Figure 3.6. – Réponse impulsionnelle et indicielle du modèle du second ordre normalisé amorti résonant ($0 < \zeta < 1$).

3.4.2. Réponse indicielle

La réponse à un échelon unité est

$$i(t) = G \left[1 + \frac{\sin\left(\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_0 t + \phi\right)}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_0 t} \right] u(t) \quad (3.14)$$

avec $\phi = \arccos(\zeta)$. La réponse est tracée figure 3.6.

Le modèle avec $\zeta = 0,7$ est le plus rapide en terme de temps de réponse à 5% (§ 1.5.2). Pour cela, il faut accepter un léger dépassement de 4,6%, voir annexe A.1. Il possède également la bande passante la plus large, sans facteur de résonance, voir annexe A.2. Il constitue donc de fait le modèle cible à synthétiser par asservissement le plus courant (§ 4).

3.5. Autres régimes du second ordre

En plus du régime amorti critique pour $\zeta = 1$ vu partie 3.3.4, il existe deux autres régimes particuliers.

3.5.1. Régime périodique stable

Lorsque $\zeta = 0$, alors H possède deux pôles imaginaires $p_0 = \pm i\omega_0$ et la réponse impulsionnelle devient

$$h(t) = G\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) u(t).$$

Il s'agit du régime résonant avec un sinus causal, d'amplitude $G\omega_0^2$ à la fréquence propre ω_0 . Ces systèmes sont en équilibre instable et peuvent, par un léger changement de conditions expérimentales, basculer dans le régime divergent.

3.5.2. Régime divergent

Le facteur d'amortissement est négatif, la partie réelle des pôles est positive et l'exponentielle est croissante dans l'équation (3.13) de la réponse impulsionnelle

$$h(t) \propto \sin(\cdot) e^{-\xi\omega_0 t} u(t).$$

Le système diverge jusqu'à la rupture ou la saturation d'un élément.

3.6. Autres modèles

3.6.1. Modèle intégrateur pur

L'équation générale d'un intégrateur pur de constante de temps T est

$$T\dot{s}(t) = k(t).$$

La fonction de transfert est

$$H(p) = \frac{1}{Tp}$$

et la réponse en fréquence

$$H(i\omega) = \frac{1}{iT\omega}.$$

Le diagramme de Bode est une droite en gain avec un déphasage constant de -90 degrés. Le diagramme de Black est une droite verticale en -90° . La réponse impulsionnelle est un échelon. La réponse indicielle est une rampe. Un passe-bas du premier ordre est un intégrateur pour $\omega > 10/T$. Le condensateur est un intégrateur pur.

3.6.2. Modèle à retard pur

Si le capteur ne peut être placé à proximité immédiate du phénomène à mesurer ou que l'information ne se propage pas instantanément, la mesure s_m est en retard par rapport à la grandeur à asservir

$$s_m(t) = s(t - \tau) \rightarrow S_m(p) = S(p)e^{-\tau p}. \quad (3.15)$$

On a la fonction de transfert

$$H(p) = e^{-\tau p}$$

et la réponse en fréquence

$$H(i\omega) = e^{-i\omega\tau}.$$

Le diagramme de Bode est une droite horizontale de gain $|H| = 1$ et le déphasage une pente $\arg H = -\omega\tau$. Le déphasage *augmente* avec ω et rendra le système plus difficile à réguler (§ 4.2.3).

3.6.3. Modèle d'ordre supérieur à deux

Par décomposition en éléments simples B, un système d'ordre supérieur à deux peut être décomposé en une somme de systèmes du premier et du second ordre

$$H(p) = \frac{K}{p^m} \frac{\prod_i (p - z_i) \prod_j (p - z_j)(p - z_j^*)}{\prod_k (p - p_k) \prod_l (p - p_l)(p - p_l^*)}$$

où z_* sont les zéros simples et doubles, p_* les pôles simples et doubles et p^m les termes d'intégration pure. La réponse du système complet est alors la superposition de la réponse de chacun de ces systèmes.

Dans ce cas, la réponse du système est fortement marquée par les pôles situés près de l'axe imaginaire, dits *pôles dominants*. Ils correspondent

- soit à des pôles réels, reliés à des constantes de temps importantes,
- soit à des pôles complexes, reliés à des amortissements faibles et donc des oscillations importantes. Les pôles complexes, relatifs à des sous-systèmes du second ordre, sont appelés *modes*.

3.6.4. Modèles généralisés

L'ordre d'un système est déterminé par le degré du dénominateur. Les modèles de premier et second ordre peuvent avoir un numérateur de même degré que le dénominateur, $\deg N(p) = \deg D(p)$. On appelle ces systèmes *généralisés*. Cela ne change pas les comportements fondamentaux, mais introduit des zéros dans la fonction de transfert, donc des fréquences où la sortie du système sera atténuée ou nulle.

Les modèles où $\deg N(p) > \deg D(p)$ ne sont pas réalisables, car non-causaux. La sortie à un instant t dépend de l'entrée dans le futur.

À compléter.

Chapitre 4.

Asservissement

4.1. Systèmes bouclés

Soit un système possédant une *fonction de transfert en boucle ouverte* (FTBO) $G(p)$. La sortie $S(t)$ est utilisée dans une boucle de rétroaction possédant une réponse $R(p)$, et dont la sortie $r(t)$ est retranchée à la consigne $e(t) = c(t) - r(t)$. Le schéma de principe est illustré figure 4.1.

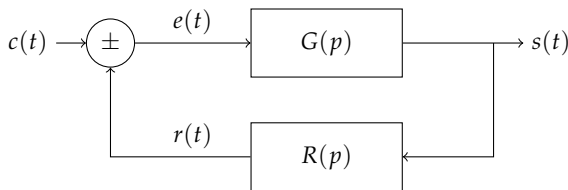


Figure 4.1. – Système bouclé.

4.1.1. Fonction de transfert en boucle fermée

On définit la *fonction de transfert en boucle fermée* (FTBF) $H(p)$ comme la fonction de transfert du système complet soit

$$H(p) = \frac{S(p)}{C(p)}.$$

On calcule facilement

$$H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)R(p)}. \quad (4.1)$$

Propriété 2. Un SLI bouclé est un SLI.

Le SLI bouclé possède donc des réponses temporelles et fréquentielles. Tout le chapitre 3 s'applique aussi bien à G qu'à H .

4.1.2. Retour unitaire

Si le retour est un « simple fil », $R(p) = 1$, alors il est dit *unitaire*, et on a

$$H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)}.$$

De même on a

$$G(p) = \frac{H(p)}{1 - H(p)}.$$

Autrement dit, la connaissance de la FTBO permet de prédire le comportement en BF. En particulier, l'abaque de Black-Nichols, pour les retours unitaires, permet de lire la FTBF sur les axes curvilignes en ayant tracé la FTBO sur les axes rectilignes.

Propriété 3. Le bouclage d'un système à retour unitaire conserve l'ordre du système. Si la FTBO est d'ordre n alors la FTBF est d'ordre n également.

On peut toujours se ramener à l'étude d'un système à retour unitaire, quelle que soit la complexité des processus mis en jeu. Il suffit de poser, par exemple, comme FTBO

$$G(p) = C(p)A(p)P(p)S(p)R(p)$$

où

- $C(p)$ serait la réponse d'un correcteur en aval de l'erreur $e(t)$,
- $A(p)$ la réponse des actionneurs,
- $P(p)$ la réponse du processus,
- $S(p)$ la réponse des capteurs,
- $R(p)$ la réponse de la chaîne de retour.

4.1.3. Usage

Il y a de nombreux usages à la boucle de rétroaction, déjà abordés partie 1.5. Les plus courants sont

- la poursuite et la régulation,
- augmenter la rapidité apparente du régime transitoire,
- améliorer les caractéristiques du régime permanent,
- diminuer la sensibilité,
- ou encore, stabiliser un système instable en boucle ouverte.

4.2. Stabilité des systèmes bouclés

La stabilité des systèmes (§ 1.5.2), déjà posée pour les systèmes du second ordre, est très étudiée. En particulier, on peut établir des conditions sur la FTBO pour que la FTBF soit stable.

4.2.1. Critère général de stabilité

Par décomposition en éléments simples de la FTBF on a

$$H(p) = \sum_i \frac{A_i}{(p - p_i)} + \sum_j \frac{B_j}{(p - p_j)^2} + \dots \quad (4.2)$$

et la réponse impulsionnelle

$$h(t) = \sum_i A_i e^{p_i t} + \sum_j B_j t e^{p_j t} + \dots$$

Que peut-on dire de l'observation de $h(t)$? On remarque la présence d'exponentielles qui seront décroissantes si $\Re[p_{i,j}] < 0$. Cette observation intuitive permet d'introduire le théorème suivant.

Théorème 2. Condition générale de stabilité

Un système est stable si et seulement si sa fonction de transfert ne possède aucun pôle à partie réelle positive.

Un système asservi est stable si et seulement si sa fonction de transfert en boucle fermée ne possède aucun pôle à partie réelle positive.

Bien que puissant, car général, ce théorème nécessite d'avoir d'une part un modèle fiable et d'autre part la connaissance des pôles.

4.2.2. Critère algébrique de Routh(-Hurwitz)

Si on dispose de la forme développée du dénominateur $D(p)$, plus aisée à avoir que la forme factorisée, alors on peut mettre en œuvre le critère de Routh qui statue sur les racines de $D(p)$ sans avoir à les calculer explicitement.

On pose le dénominateur comme polynôme de degré n

$$D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0.$$

Alors on peut dire que

- si certains a_i sont négatifs ou nuls, alors le système est instable.
- si tous les a_i sont positifs, on construit le tableau de Routh (annexe C). Une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité est que tous les coefficients de la 1^{re} colonne du tableau soient de même signe.
- les a_n dépendent des grandeurs du système (gain, etc.). Le tableau permet de déduire les valeurs permises pour avoir la stabilité.

En particulier

- pour un système du premier et second ordre, $n = 1$ ou 2 , on dispose déjà des conditions, voir chapitre 3.
- pour $n = 3$ il faut ajouter la condition

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0.$$

- pour $n = 4$ il faut encore ajouter la condition

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 > \frac{a_1^2 a_4}{a_3}.$$

Ce critère nécessite un modèle et la FTBF. Il ne renseigne pas sur la robustesse de la stabilité ; il n'y a pas de notion de marge.

4.2.3. Critère de Nyquist et Revers

Critère général de Nyquist

On introduit les définitions suivantes.

Définition 3. On appelle γ , le contour de Bromwich, la courbe fermée décrite par p , dans le sens horaire, passant par l'axe imaginaire, en excluant l'origine, puis le demi-cercle de rayon infini centré à l'origine.

Il s'agit du contour incluant tous les complexes à partie réelle positive ou nulle, excluant l'origine.

L'image Γ_H de $H(p)$, quand p décrit γ , est appelée lieu de Nyquist.

Théorème 3. Quand p décrit γ , si Γ_H n'entoure pas l'origine, alors H n'a ni zéro, ni pôle dans γ . Donc H n'a ni zéro, ni pôle à partie réelle positive.

Si on s'intéresse à la stabilité en BO, c'est l'absence de pôles dans γ qui importe. Si on s'intéresse à la stabilité en BF alors c'est l'absence des zéros dans γ qui importe. En effet

Théorème 4. Si $G(p)$ est la FTBO et Γ_G n'entoure par $(-1, 0)$, alors

- le lieu Γ_{1+G} n'entoure par l'origine,
- la fonction de transfert $1 + G(p)$ n'a pas de zéro dans γ ,
- la FTBF

$$H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)}$$

n'a pas de pôles dans γ ,

- le système $G(p)$ est stable en BF.

Le point $(-1, 0)$ est appelé *point critique* et correspond à $(-180^\circ, 0)$ dans le diagramme de Black.

Le critère de Nyquist est un critère graphique. Il permet de prédire le comportement de la BF en connaissant la réponse en BO.

Critère de Revers

Dans le cas courant où le degré du numérateur de la FTBO est strictement inférieur au degré du dénominateur, on peut utiliser le critère de *Revers*, qui est une version du critère de Nyquist plus simple à utiliser.

Théorème 5. Soit $G(p)$ la FTBO alors

- si p parcourt le demi-grand axe positif, i.e., l'axe des fréquences $p = i\omega$, dans le sens croissant,
- et si le lieu Γ_G laisse le point critique à gauche dans le diagramme de Nyquist,
- ou laisse le point $(-180^\circ, 0)$ à droite dans le diagramme de Black,

alors le système est stable en boucle fermée.

Le critère de Revers, critère graphique, utilise la réponse en fréquence qui peut s'obtenir par des mesures et avec l'aide de la transformation de Fourier.

Ce critère a une interprétation physique : aux hautes fréquences, lorsque le déphasage approche 180° , il faut atténuer le retour avec un gain < 1 , sinon le signal réinjecté sera amplifié dans une réaction positive. C'est l'effet Larsen.

4.2.4. Marge de stabilité

La réponse d'un système évolue dans le temps par changement des conditions expérimentales. Le critère de Revers permet de définir les notions de robustesse ou de marge pour garantir la stabilité ; plus le lieu s'approche de $(-180^\circ, 0)$, plus le système risque d'être instable. Inversement, plus le lieu passe loin du point critique, plus le système a des chances de rester stable.

Dans le diagramme de Black, les distances au point critique, sur respectivement l'axe des gains et l'axe des phases, définissent la marge de gain M_g et la marge de phase M_ϕ . On conseille

- M_g entre 10 et 15 dB,
- M_ϕ entre 45 et 60 deg,

correspondant aux marges d'un second ordre avec $\xi \approx 0.7$.

4.3. Performance

La performance des asservissements revient à étudier la capacité du système bouclé à suivre la consigne en *poursuite* et à maîtriser les perturbations en *régulation*

Pour cela on pose un modèle pour la consigne $C(p)$ et la perturbation

$$P(p) = \frac{P_0}{p^r}.$$

Donc la consigne ou la perturbation

- est un Dirac $\delta(t)$ si $r = 0$,
- est un échelon $u(t)$ si $r = 1$,
- est une rampe $r(t)$ si $r = 2$,
- etc.

Pour un processus de FT $G(p)$, avec un régulateur $R(p)$, une consigne $C(p)$, une perturbation $P(p)$ s'ajoutant après le régulateur $R(p)$, on a comme sortie du système bouclé

$$S(p) = \frac{R(p)G(p)}{1 + R(p)G(p)}C(p) + \frac{G(p)}{1 + R(p)G(p)}P(p).$$

Les performances en poursuite s'étudient avec $N(p) = 0$ et en régulation avec $C(p) = 0$.

4.3.1. Régulation

Par l'étude de la sortie

$$s(+\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} pS(p)$$

on montre que la réjection est

- meilleure si gain de boucle est grand,
- complète si la boucle a r intégrations.

L'augmentation du gain approche le lieu du point critique et peut conduire à une instabilité. De même, l'ajout d'intégration introduit un déphasage supplémentaire, voir partie 3.6.1, et approche également le lieu du point critique.

4.3.2. Poursuite

La poursuite s'étudie avec la précision (§ 4.3.2). Sans perturbation, l'erreur en régime permanent est

$$e(+\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} pE(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{pC(p)}{1 + R(p)G(p)}.$$

Tout comme pour la régulation on montre que l'erreur est

- meilleure si gain de boucle est grand,
- complète si la boucle a r intégrations.

Pour la poursuite et la régulation, dans les systèmes asservis, il y a un compromis entre les performances et la stabilité.

4.3.3. Rapidité

On souhaite que le système réagisse rapidement aux changements de consignes et « efface » rapidement les perturbations. Le temps de réaction dépend des constantes de temps du système et donc des pôles.

Avoir un système plus rapide correspond à une diminution des constantes de temps, donc à l'élargissement de la bande passante, soit un décalage vers la droite des pulsations de coupures dans le diagramme de Bode.

Le bouclage et la correction permettent d'obtenir des pôles différents en BF et ainsi d'augmenter la rapidité apparente du système. Comme on ne change pas le processus asservi, cela passe par la construction d'une commande $k(t)$ de telle sorte que l'on « simule » un processus plus rapide. Il faut donc faire attention aux sollicitations excessives.

Chapitre 5.

Commandes analogiques

5.1. Objectifs

Les processus que l'on souhaite asservir peuvent présenter plusieurs défauts ou caractéristiques que l'on souhaite modifier.

- Il peut être mal amorti, *i.e.*, il y a trop d'oscillations aux changements de consignes ou après une perturbation.
- Il peut être trop lent ou avec trop d'inertie.
- Il présente une dérive : la sortie n'est pas constante alors que la consigne l'est. C'est le signe d'intégration dans la FT.
- Il peut être instable.

On peut alors ajouter un correcteur, ou régulateur $R(p)$, modifiant la FTBO $G(p)$ et introduire une boucle de rétroaction pour obtenir une FTBF avec les caractères souhaités, généralement sous la forme du schéma figure 5.1.

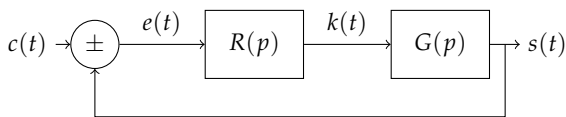


Figure 5.1. – Asservissement avec correcteur.

L'objectif du correcteur, ou de la commande analogique, est

- de garantir la stabilité avant tout,
- d'avoir une meilleure rapidité apparente,
- d'avoir la meilleure poursuite de la consigne,
- de réguler au mieux l'effet des perturbations.

Le régulateur le plus simple, adéquat pour les systèmes à très forte inertie, est le *tout ou rien* (employé dans les thermostats basiques par ex.)

$$k(t) = \begin{cases} K_+ & \text{si } e(t) > 0 \text{ (ou } \delta), \\ K_- & \text{si } e(t) < 0 \text{ (ou } -\delta), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les correcteurs analogiques sont le plus souvent constitués de circuit à amplificateurs opérationnels.

5.2. Méthodologie

5.2.1. Méthode empirique

Une première méthode pour la synthèse des correcteurs passe par l'analyse de la FTBO $G(p)$, généralement dans le diagramme de Black. On en déduit les modifications à apporter à la FTBO pour obtenir la FTBF souhaitée. Le cahier des charges peut être une marge de gain différente, un changement de bande passante, *etc.* On pioche alors dans les correcteurs connus.

5.2.2. Méthode du modèle

Une deuxième méthode passe par les modèles. On dispose d'un modèle pour $G(p)$ et on souhaite un modèle cible pour la FTBF, en ajoutant éventuellement un correcteur $R(p)$. Un cahier des charges peut être un modèle du second ordre avec un gain statique unité et $\zeta = 0,7$. La FT $R(p)$ obtenue est alors synthétisée, si elle est réalisable.

5.2.3. Optimisation par ordinateur

Une dernière méthode passe par la définition d'une fonction de coût pour donner une mesure objective de l'évolution de l'erreur $e(t)$ en réponse à un échelon de commande. On a par exemple l'*intégral square error* (ISE)

$$J(\theta) = \int_0^{+\infty} |e(t)|^2 dt$$

mais d'autres sont possibles. On calcule ensuite par ordinateur les paramètres θ du correcteur qui donnent le coût minimal.

5.3. Correcteur PID

Le correcteur à actions *Proportionnelle, Intégrale, Dérivée* (PID) est le plus utilisé dans l'industrie et équipe environ 70% des processus. Il est très flexible et possède de bonnes propriétés. Il se décline en correcteur P, PI ou encore PD.

Action P. On a

$$k(t) = Ke(t).$$

La commande est dosée à proportion de l'écart à la consigne. Le régulateur est un simple amplificateur de gain $G > 0$.

Action P agit par *modification de la marge de gain*. Elle amplifie toutes les fréquences sans changer la phase.

Action I. On a

$$k(t) = \frac{1}{T_i} \int_{-\infty}^t e(u) du$$

où T_i est la constante d'intégration. La commande I est plus progressive que la commande P. Elle est « persévérante » ; la commande peut subsister lorsque $e(t) = 0$. Le processus est toujours alimenté et un dépassement de consigne est possible.

L'action I agit par *retard de phase et amplification des basses fréquences*. Elle efface les perturbations constantes et assure de réguler sans erreur de position (§ 1.5.2).

Action D. On a

$$k(t) = T_d \dot{e}(t)$$

où T_d est la constante de temps de la dérivation. Si l'écart à la consigne augmente, il y a lieu de solliciter le processus plus fortement que s'il diminue. De même il faut solliciter d'autant plus fortement que l'écart augmente

rapidement. La commande D permet une correction rapide de l'erreur sans risque de dépassement de consigne, mais peut solliciter fortement le processus.

L'action D agit par *avance de phase* et *amplification des hautes fréquences*. On obtient une meilleure stabilité par augmentation de la marge de phase, et une meilleure rapidité par augmentation de la bande passante.

5.3.1. Loi de commande

La loi de commande du PID correspond à

$$k(t) = K \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_{-\infty}^t e(u) du + T_d \dot{e}(t) \right]$$

La fonction de transfert correspondante est

$$R(p) = K \frac{1 + T_i p + T_i T_d p^2}{T_i p} = K \frac{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}{T_i p}$$

avec

$$T_{1,2} = \frac{T_i}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4 \frac{T_d}{T_i}} \right).$$

Le PID théorique n'est donc pas réalisable en pratique, notamment à cause du dérivateur parfait qui n'existe pas. On utilise alors une forme filtrée du PID qui réalise une dérivation jusqu'à des pulsations de 3 à 5 fois $1/T_d$

$$R(p) = K \left[1 + \frac{1}{T_i p} + \frac{T_d p}{1 + \frac{T_d}{N} p} \right] \quad \text{avec} \quad N \approx 10.$$

5.3.2. Exemple de schéma

Un schéma possible est illustré figure 5.2. La fonction de transfert correspondante est

$$R(p) = \frac{R_2 R_4}{R_1 R_3} \cdot \frac{(1 + R_1 C_1 p)(1 + R_3 C_3 p)}{(1 + R_2 C_2 p)(1 + R_4 C_4 p)}.$$

Pour la synthèse concrète des filtres on utilise les techniques de synthèse basées par exemple sur les filtres de BUTTERWORTH ou de TCHEBYCHEV qui solutionnent directement le schéma à mettre en œuvre en fonction d'un gabarit ou d'un FT cible.

5.3.3. Réglages

Le réglage consiste à déterminer les trois paramètres K, T_i et T_d . On choisit généralement $T_i = 4T_d$. Les effets des trois paramètres ne sont pas indépendants.

Méthode du pivot

On choisit $T_i = 4T_d$, soit $T_1 = T_2 = T_i/2$. On pose la pulsation pivot

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{T_i T_d}} = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}.$$

La correction à ω_p sera K soit

$$R(i\omega_p) \approx K.$$

Les pulsations « moyennes »

$$\frac{1}{T_i} < \omega < \frac{1}{T_d}$$

sont peu affectées, orientant le choix des constantes de temps.

Réglages de Ziegler et Nichols

On pose tout d'abord $T_i = +\infty$ et $T_d = 0$.

— Si le système est instable en BO, on procède par pompage en BF. On choisit K petit puis

1. on augmente le gain K jusqu'à l'apparition d'oscillations,
2. on note le gain K_{osc} et la période des oscillations T_{osc}
3. on adopte

$$K = 0,6 K_{osc}, \quad T_i = \frac{T_{osc}}{2}, \quad T_d = \frac{T_i}{4}.$$

— Sinon on procède par *essai indiciel en BO*. On choisit $K = 1$ puis

1. on trace la tangente au point d'inflexion de la réponse indicelle,
2. on mesure les retards τ et $\tau + T$ auxquels la tangente vaut respectivement 0 et la hauteur E_0 de l'échelon en entrée,
3. on adopte

$$K = 1,2 \frac{T}{\tau}, \quad T_i = 2\tau, \quad T_d = \frac{T_i}{4} = \frac{\tau}{2}.$$

5.4. Autres correcteurs

5.4.1. Correcteurs à avance de phase

Très utilisé, le correcteur à avance de phase a un effet D. Il augmente la marge de phase du système et donc la stabilité et la rapidité. La fonction de transfert est

$$R(p) = K \frac{1 + aTp}{1 + Tp}$$

avec $a > 1$. L'avance de phase est maximale pour $\omega_p = \frac{1}{T\sqrt{a}}$.

On choisit a pour fixer l'avance de phase maximale requise, puis T de sorte que l'avance de phase maximale se produise à la pulsation voulue.

5.4.2. Correcteurs à retard de phase

Le correcteur à retard de phase a un effet I. Il est peu utilisé et on lui préfère le PID. Il augmente le gain aux basses fréquences et augmente ainsi la précision par effet I. Sa fonction de transfert est

$$R(p) = K \frac{1 + Tp}{1 + bTp}$$

avec $b > 1$.

En pratique on choisit $K = b$ afin de ne pas affecter les pulsations $\omega \geq 10/T$. On peut ajouter en cascade un correcteur à avance de phase, mais on préfère généralement un PID.

5.5. Correction par ordinateur

La correction analogique par ordinateur consiste à échantillonner rapidement le signal d'erreur $e(t)$ à l'aide d'un CAN, de calculer la commande puis de synthétiser cette commande $k(t)$ à l'aide d'un CNA.

À compléter.

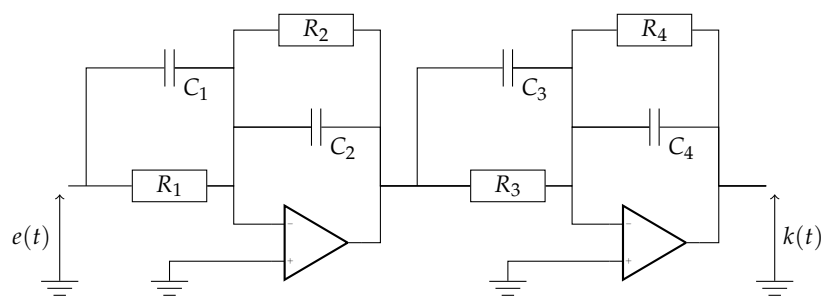


Figure 5.2. – Exemple de schéma électrique d'un PID avec amplificateur opérationnel

Deuxième partie

Automatique numérique

Chapitre 6.

Signaux et systèmes numériques

6.1. Signaux

- Signal $s : \theta \rightarrow s(\theta)$
- Signal à temps discret si θ discret
- Signal quantifié si $s(\theta)$ discret
- Signal numérique si θ et $s(\theta)$ discret
- Ces signaux sont des suites numériques

$$\{s_k\}, k \in \mathbb{Z},$$

et peuvent être

- numériques par nature,
- issu de l'échantillonnage d'un signal continu $s_c(t)$.
- Dans le deuxième cas on associe le plus souvent une période d'échantillonnage T_e telle que

$$s_k = s[k] = s_c(kT_e).$$

6.2. Échantillonnage

- Schéma de l'échantillonnage :
 1. interrupteur (T_e, δ) , $\delta \ll T_e$,

$$s(t) \mapsto s_e(t).$$
 2. bloqueur d'ordre zéro,
 3. convertisseur analogique numérique.
- Quantification \approx bruit additif de moyenne nulle et de variance $q^2/12$ pour une quantification par arrondi ou $q^2/3$ par troncature.
- Modèle idéal

$$\begin{aligned} s_e(t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_k \delta(t - kT_e) \\ &= \sqcup\sqcup_{T_e} \times s(t). \end{aligned}$$

— La TF s'écrit

$$\begin{aligned} S_e(v) &= T_e \sqcup\sqcup_{F_e}(v) * S(v) \\ &= T_e \sum_{k \in \mathbb{Z}} S(v - kF_e). \end{aligned}$$

- $F_e = 1/T_e$ la fréquence d'échantillonnage.
- Le spectre S_e est périodique de période F_e .
- Théorème d'échantillonnage de Shannon
- Théorème 6.** Si s est à bande limitée, soit

$$S(v) = 0, \forall v \geq v_m,$$

alors s peut être reconstruit sans erreur à partir des échantillons $\{s_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ si $F_e > 2v_m$.

- Dans le cas contraire, on parle de repliement spectral.
- L'introduction artificielle d'information est évitée avec un filtre antirepliement.

6.3. Reconstruction

- Schéma de reconstruction :
 1. convertisseur numérique analogique,
 2. bloqueur d'ordre zéro,
 3. passe-bas de lissage.
- Reconstruction théorique

$$s(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_k \frac{\sin(\pi F_e(t - kT_e))}{\pi F_e(t - kT_e)}.$$

6.4. Signaux de base

— Impulsion (Kronecker)

$$\delta_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (6.1)$$

— Échelon ou Heaviside

$$u_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (6.2)$$

— Rampe

$$v_k = \begin{cases} k & \text{si } k \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (6.3)$$

— Signaux causaux

$$s_k = 0, \forall k \leq 0. \quad (6.4)$$

6.5. SLI numériques

— Liés aux équations récurrentes à coefficients constants

$$\sum_{i=0}^{N-1} a_i s_{k-i} = \sum_{j=0}^{M-1} b_j e_{k-j} \quad (6.5)$$

avec $e_i = s_i = 0, \forall i \leq 0$.

- N est l'ordre d'un système.
- Habituellement on a $M \leq N$.
- Également caractérisé par une réponse impulsionnelle, une fonction de transfert en z et une réponse en fréquence.
- Les SLI sont aussi caractérisés par une relation de convolution discrète

$$s_k = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e_n h_{n-k}$$

où h_k est la réponse impulsionnelle du système.

- Si $h_k = 0, \forall k \leq 0$, le système est causal. Un système non causal n'est pas réalisable. Il peut être réalisable avec un décalage temporel.
- Les signaux z^k , avec $z \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{Z}$ sont les signaux propres des SLI numériques.

6.6. Transformation en \mathcal{Z}

Cette transformation associe une suite $\{s_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ à une fonction $S(z)$ à valeur complexe de la variable complexe z . Elle est issue de la discrétisation de la transformation de Laplace d'un signal continu $s(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Elle s'obtient également par la transformation de Laplace d'un signal échantillonné, c'est-à-dire multiplié par un peigne de Dirac. C'est enfin la projection d'un signal numérique sur les signaux propres des SLI numériques, comme la TL est la projection des signaux continus sur les signaux propres des SLI analogiques.

Elle est utile pour la modélisation de systèmes dynamiques discrets et la synthèse de filtres numériques, définie par équation récurrente, à réponse impulsionnelle finie ou infinie.

6.6.1. Définition

Si $\{s_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est une suite à valeurs réelles ou complexes, causale, alors sa transformée mono latérale est la série S définie comme

$$S(z) = \mathcal{Z}[s_k] = \sum_{k=0}^{+\infty} s_k z^{-k}, \quad (6.6)$$

$$\text{avec } z \in C = \{z \in \mathbb{C} : \rho < |z|\}$$

où C est le domaine de convergence, ρ le rayon de convergence et $<$ étant $<$ ou \leq . C'est une condition nécessaire pour la non-divergence de la série (avec $\rho = 0$ potentiellement).

Cette transformation est utile par le fait que l'on projette sur les signaux propres (z^k) des filtres numériques, au même titre que la transformation de Laplace projette sur les signaux propres (e^{st}) des filtres analogiques. Le tableau 6.1 présente quelques transformées usuelles.

Remarque 1. La transformation existe pour des suites non causales c'est-à-dire avec des indices de sommation sur \mathbb{Z} au lieu de \mathbb{N} . Dans ce cas, il peut y avoir un anneau de convergence et la série ne converge que pour

$$z \in C = \{z \in \mathbb{C} : \rho_1 < |z| < \rho_2\}. \quad (6.7)$$

La transformation inverse s'opère généralement à l'aide de table. Elle est cependant définie comme

$$s_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_C S(z) z^{k-1} dz$$

où C est un chemin fermé parcouru dans le sens inverse des aiguilles d'une montre et à l'intérieur de l'anneau de convergence.

6.6.2. Propriétés

Avec $n \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{C}$, alors

$$\begin{aligned} f_k &\xrightarrow{\mathcal{Z}} F(z), \\ af_k + bg_k &\xrightarrow{\mathcal{Z}} aF(z) + bG(z), \\ f_{k-n} &\xrightarrow{\mathcal{Z}} z^{-n}F(z), \\ a^k f_k &\xrightarrow{\mathcal{Z}} F\left(\frac{z}{a}\right), \\ f_k * g_k &\xrightarrow{\mathcal{Z}} F(z)G(z), \\ k^n f_k &\xrightarrow{\mathcal{Z}} \left(-z \frac{d}{dz}\right)^n F(z), \\ kf_k &\xrightarrow{\mathcal{Z}} -z \frac{d}{dz} F(z). \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned} f_0 &= \lim_{k \rightarrow 0} f_k = \lim_{z \rightarrow +\infty} F(z), \\ \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z). \end{aligned}$$

6.7. Fonction de transfert

— On applique la TZ à l'équation récurrente eq. (6.5) soit

$$\sum_{i=0}^{N-1} a_i z^{-i} S(z) = \sum_{j=0}^{M-1} b_j z^{-j} E(z) \quad (6.8)$$

puis

$$H(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{\sum_{j=0}^{M-1} b_j z^{-j}}{\sum_{i=0}^{N-1} a_i z^{-i}}. \quad (6.9)$$

— On a $S(z) = H(z)E(z)$.

— $H(z)$ est la TZ de la RI h_k .

— La réponse en fréquence s'obtient en parcourant le cercle unité

$$z = e^{i\omega T_e}, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

— Dans ce cas, la TZ correspond également à la TFD.

— La variable z parcourant le cercle unité, la réponse en fréquence $H(i\omega)$ est périodique de période $2\pi T_e$.

— Ce qui correspond également à la périodisation induite par l'échantillonnage.

6.8. Modèles standards

6.8.1. Modèle du premier ordre

— Définie par

$$\begin{cases} s_{k+1} - as_k = be_k \\ s_{k_0} \text{ connu.} \end{cases}$$

— Résolution eq. homogène

$$\begin{aligned} s_{k_0+1} &= as_{k_0} \\ s_{k_0+1} &= as_{k_0+1} = a^2 s_{k_0} \\ &\vdots \\ s_{k_0+n} &= a^n s_{k_0}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_k &\stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{z}{z^{-1}} \mathbf{1}, \\
u_k &\stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{z}{z^{-1}} \frac{1}{1-z^{-1}}, \text{ avec } 1 < |z|, \\
ku_k &\stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{z}{z^{-1}} \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}, \text{ avec } 1 < |z|, \\
a^k u_k &\stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{z}{z^{-1}} \frac{1}{1-az^{-1}}, \text{ avec } |a| < |z|, \\
ka^k u_k &\stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{z}{z^{-1}} \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}, \text{ avec } |a| < |z|, \\
a^k \cos(\omega_0 k) u_k &\stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{z}{z^{-1}} \frac{1-az^{-1} \cos(\omega_0)}{1-2az^{-1} \cos(\omega_0) + a^2 z^{-2}}, \text{ avec } |a| < |z|, \\
a^k \sin(\omega_0 k) u_k &\stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{z}{z^{-1}} \frac{az^{-1} \sin(\omega_0)}{1-2az^{-1} \cos(\omega_0) + a^2 z^{-2}}, \text{ avec } |a| < |z|.
\end{aligned}$$

Table 6.1. – Transformées usuelles, avec δ_k l'impulsion unitaire, u_k l'échelon unitaire et $a \in \mathbb{C}$.

Avec $k_0 = 0$

$$s_k = a^k s_0$$

— Avec second membre

$$\begin{aligned}
s_{k_0+n} &= \cancel{as_{k_0+n-1}} + be_{k_0+n-1} \\
\cancel{as_{k_0+n-1}} &= \cancel{a^2 s_{k_0+n-2}} + abe_{k_0+n-2} \\
&\vdots \\
\cancel{a^{n-1} s_{k_0+1}} &= a^n s_{k_0} + a^{n-1} be_{k_0}
\end{aligned}$$

— Donc

$$s_{k_0+n} = a^n s_{k_0} + b \sum_{l=1}^{k-k_0} a^{l-1} e_{k-l}$$

ou encore avec $k_0 = 0$ et $s_0 = 0$

$$\begin{aligned}
s_n &= b \sum_{l=1}^k a^l e_{k-l} \\
&= b(h * e)_n
\end{aligned}$$

soit la convolution entre l'entrée et la RI

$$h_k = ba^k u_k.$$

— La RI peut se déduire également en posant $e_k = \delta_k$ puis par récursion.

— La RI est stable si $|a| \leq 1$.

— La FT est

$$\mathcal{Z}[a^k u_k] = \frac{b}{1-az^{-1}}, \text{ avec } |a| < |z|.$$

— La réponse en fréquence est

$$H(i\omega) = \frac{b}{1-ae^{-i\omega}}$$

périodique de période 2π .

Chapitre 7.

Asservissement numérique

7.1. Introduction

- Le système est numérique avec une commande k_k et une sortie s_k et une période d'échantillonnage T_e .
- Le régulateur est un calculateur numérique avec un signal d'erreur e_k et délivrant la commande k_k .
- La sortie s_k est comparée avec la consigne c_k pour délivrer le signal d'erreur.
- Le système numérique peut correspondre à un système analogique numériser avec des CAN, CNA, BOZ.
- Un filtre antirepliement peut être présent également.
- Les systèmes sont décrits par leur fonction de transfert en z .
- On a $E(z) = C(z) - S(z)$, $C(z) = K(z)/E(z)$, $G(z) = S(z)/E(z)$ et par conséquent

$$H(z) = \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)G(z)}.$$

7.2. Calcul de la fonction de transfert

Il existe deux méthodes.

1. Pour une valeur de T_e , identifier la réponse indicielle, impulsionnelle, ...
2. Si l'on connaît la FT analogique $G(p)$, en déduire la FT numérique.

Pour ce deuxième point, plusieurs méthodes existent. La suivante est standard.

- On considère que le processus numérisé correspond à la mise en cascade de $G(p)$ avec un BOZ.
- La RI d'un BOZ est $b(t) = u(t) - u(t - T_e)$. Sa FT est donc

$$B(p) = \frac{1}{p} - e^{-T_e p} \frac{1}{p} = \frac{1 - e^{-T_e p}}{p}.$$

- La FT en z correspond à la TZ de la transformée de Laplace inverse du produit

$$\begin{aligned} G_e(z) &= \mathcal{Z} \left[\mathcal{L}^{-1} [B(p)G(p)] \right] \\ &= (1 - z^{-1}) \times \mathcal{Z} \left[\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{G(p)}{p} \right] \right]. \end{aligned}$$

- En conclusion on obtient la FT du processus numérisé $G_e(z)$ ainsi :

1. On calcule

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{G(p)}{p} \right]$$

2. On discrétise $h_k = h(kT_e)$
3. On calcule $H(z)$ par TZ
4. On obtient la fonction de

$$G_e(z) = (1 - z^{-1}) H(z).$$

- Application au passe-bas du 1^{er} ordre

$$G_a(p) = \frac{K}{1 + T_e p}.$$

On a

$$h(t) = K (1 - e^{-t/T_e}) u(t)$$

donc

$$h_k = K (1 - e^{-kT_e/T_e}) u(kT_e)$$

et

$$H(z) = K \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-z_0} \right)$$

avec $z_0 = e^{-T_e/T_e}$. On en déduit

$$H(z) = Kz \frac{1 - z_0}{(z-1)(z-z_0)}$$

puis

$$\begin{aligned} G_e(z) &= (1 - z^{-1}) H(z) \\ &= \frac{z-1}{z} H(z) \\ &= K \frac{1 - z_0}{z - z_0}. \end{aligned}$$

- Si G_a est d'ordre n , G_e est d'ordre n .
- La FT G_e dépend de T_e .
- Soient p_i les pôles de G_a , alors les pôles de G_e sont $z_i = e^{p_i T_e}$

7.3. Choix de T_e

- Dépend de l'inertie du système.
- Si le signal est à f_{\max} en fréquence maximale, on choisit habituellement

$$5f_{\max} \leq F_e \leq 25f_{\max}$$

pour avoir de la marge.

- Pour réguler un système bouclé
 - Pour un système du premier ordre de constante de temps, T on considère $0,25 \leq T_e/T \leq 1,25$ soit $T_e \approx T$.
 - Pour un système du second ordre de pulsation, ω_0 on considère $0,25 \leq \omega_0 T_e \leq 1,25$ soit $T_e \approx 1/\omega_0$.

7.4. PID numérique

7.4.1. Intégrateur numérique

- L'équation récurrente est avec $s_0 = 0$

$$s_{k+1} = s_k + \frac{T_e}{T_i} e_k.$$

- Somme avec constante d'intégration T_i .
- Avec $zS(z) - S(z) = \frac{T_e}{T_i} E(z)$ on a

$$H(z) = \frac{T_e}{T_i} \frac{1}{z-1}$$

à comparer avec la FT de l'intégrateur analogique ($1/p$).

- L'intégrateur introduit un pôle donc améliore la précision, donc diminue l'erreur ou supprime une erreur statique.

7.4.2. Dérivateur numérique

- L'équation récurrente est

$$s_k = T_d \frac{e_k - e_{k-1}}{T_e}$$

- C'est un opérateur de différence.
- Avec $S(z) = \frac{T_d}{T_e} (E(z) - z^{-1}E(z))$ on a

$$H(z) = \frac{T_d}{T_e} \frac{z-1}{z}$$

- Un zéro en $z = 1$ et un pôle en $z = 0$.
- Le zéro améliore la rapidité, mais diminue la stabilité et la précision.

7.4.3. Dérivateur filtré

- Le dérivateur filtré en analogique

$$D_N = \frac{T_d p}{1 + \frac{T_d}{N} p}$$

avec $N \approx 8 - 10$.

- Équivalent numérique

$$\begin{aligned} D_N(z) &= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{D_N(p)}{p} \right] \right] \\ &= (1 - z^{-1}) \frac{Nz}{z - z_0} \end{aligned}$$

avec $z_0 = e^{-NT_e/T}$ soit

$$D_N(z) = N \frac{z-1}{z-z_0}$$

- Le pôle en $z = z_0$ adoucit la réponse.

Exemple

Avec $e_k = u_k$ alors $s_k = \delta_k \frac{T_d}{T_e}$ avec le dérivateur. Avec le dérivateur filtré, on obtient

$$S(z) = N \frac{z-1}{z-z_0} \times \frac{z}{z-1} = N \frac{z}{z-z_0}$$

soit $s_k = Nz_0^k$.

7.4.4. PID

Analogique

$$C(p) = K \left(1 + \frac{1}{T_i p} + \frac{T_D p}{1 + \frac{T_d}{N} p} \right)$$

Numérique

$$C(z) = K \left(1 + \frac{T_e}{T_i} \frac{1}{z-1} + N \frac{z-1}{z-z_0} \right)$$

La programmation se fait avec l'équation récurrente par TZ inverse et en posant $K(z) = C(z)E(z)$, soit

$$\begin{aligned} k_{k+2} - (1+z_0)k_{k+1} + z_0k_k = \\ K \left((1+N)e_{k+2} - \left(1+z_0+2N - \frac{T_e}{T_i} \right) e_{k+1} \right. \\ \left. + \left(z_0+N - \frac{z_0 T_e}{T_i} \right) e_k \right) \end{aligned}$$

Pour la causalité on pose $k' = k+2$, puis il suffit de faire l'application numérique.

7.5. Forme standard de fonction de transfert

7.5.1. Forme générale

Elle s'écrit

$$G(z) = \frac{K}{(z-1)^n} z^{-r} \frac{N(z)}{D(z)}$$

avec

- n intégration numérique (pôle $z = 1$)
- r retards purs (zéro $z = 0$)
- un gain statique K .

7.5.2. Premier ordre

- La FT est

$$G(z) = \frac{b_0}{z-z_0}$$

où $b_0 = K(1-z_0)$ et $z_0 = e^{-T_e/T}$.

- $z_0 \in \mathbb{R}$ et $0 < z_0 < 1$, à comparer avec $p_0 = -\frac{1}{T} < 0$.
- Le gain statique est $s(+\infty) = K$ si $e_k = u_k$.

7.5.3. Second ordre

- Paramétré par le facteur d'amortissement ζ et la pulsation ω_0 .
- Sert de modèle à atteindre par asservissement.
- Deux formes de fonction de transfert :

- Développée ou polynomiale, utile pour calculer la commande par fonction récurrente
- Factorisée avec pôle $z_i = e^{p_i T_e}$ où

$$p_i = -\zeta \omega_0 \pm i \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$$

et zéro, utile pour étudier le comportement.

— On a

$$G(z) = \frac{b_1 z + b_0}{z^2 + a_a z + a_0} = \frac{b_1(z - z_0)}{(z - z_1)(z - z_1^*)}$$

— Avec $\alpha = e^{-\xi\omega_0 T_e}$ et $\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$ on a

$$\begin{aligned} a_0 &= \alpha^2 \\ a_1 &= -2\alpha \cos(\omega_0 T_e) \\ b_0 &= \alpha^2 + \alpha \left(\xi \frac{\omega_0}{\omega_p} \sin(\omega_p T_e) - \cos(\omega_p T_e) \right) \\ b_1 &= 1 - \alpha \left(\xi \frac{\omega_0}{\omega_p} \sin(\omega_p T_e) + \cos(\omega_p T_e) \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} z_0 &= -\frac{b_0}{b_1} \\ z_1 &= \exp(-\xi\omega_0 T_e + i\omega_p T_e) \end{aligned}$$

— Le calcul et calibrage se fait par ordinateur ou des abaques.

— La mise en œuvre se fait par l'équation récurrente.

7.6. Réponse en fréquence

— Réponse $G(i\omega)$ à une sinusoïde de pulsation ω avec $p = i\omega$, c'est-à-dire $z = e^{i\omega T_e}$.

— Pour un premier ordre

$$G(z = i\omega) = \frac{a}{z - z_0} = \frac{a}{e^{i\omega T_e} - z_0}$$

— On détermine le gain $|G|$ et le déphasage $\arg G$ du système.

— Le terme $e^{i\omega T_e}$ étant période de période $\omega_e = 2\pi/T_e = 2\pi F_e$

— Donc $G(z)$ est périodique de période $2\pi/T_e$.

— On dispose également des diagrammes de Bode, Nyquist et Black.

— On se limite à $\omega \in [0, \omega_e/2]$ par symétrie des systèmes réels.

7.7. Stabilité

— Les pôles z_i caractérisent la dynamique.

— Un système est stable s'il revient au repos.

— On peut montrer facilement que la réponse à une impulsion d'un système d'ordre n peut s'écrire

$$S(z) = \frac{A_1 z}{z - z_1} + \frac{A_2 z}{z - z_2} + \dots$$

soit

$$s_k = A_z z_1^k + A_z z_2^k + \dots$$

— Donc un système est stable si $|z_i| < 1, \forall i$. Les pôles sont dans le cercle unité. Si $z_i = 1$ on est à la limite de stabilité.

— Plus un pôle est proche de $(0,0)$, plus le système est amorti.

7.7.1. Critère de Jury

Les pôles n'étant pas toujours aisés à calculer, on dispose du critère de Jury reposant sur l'étude du dénominateur développé

$$D(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0.$$

Alors le système est stable si $D(1) > 0$, et $D(-1) > 0$ pour n pair ou $D(-1) < 0$ pour n impair, et $n - 1$ contraintes satisfaites :

— $|a_0| < a_2$ pour $n = 2$,

— $|a_0| < a_3$ et $|a_1^2 - a_3^2| > |a_0 a_2 - a_1 a_3|$ pour $n = 3$.

Pour $n > 3$, utiliser un ordinateur.

7.7.2. Exemples

Vérifier que

$$H_1(z) = \frac{z - 0,5}{z^2 - 0,9z + 0,8}$$

est stable et que

$$H_2(z) = \frac{2(z + 2)}{z^2 - 3,5z - 2}$$

ne l'est pas.

7.7.3. Marge de gain et de phase

Le critère est le même qu'en analogique, le point critique étant toujours $(-180, 0)$. Le diagramme n'est calculé que pour $z = e^{i\omega T_e}$ et $0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{T_e}$.

7.8. Précision

La précision correspond à la valeur finale

$$\begin{aligned} e(+\infty) &= \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)E(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})E(z) \end{aligned}$$

qui peut s'écrire

$$E(z) = \frac{S_c(z)}{1 + \frac{K}{(z-1)^n z^{-r} \frac{N(z)}{D(z)}}}$$

La précision dépend du nombre d'intégrations n voir table 7.1.

n	Échelon	Ramplé	Parabole
0	$\frac{E_0}{1+K}$	∞	∞
1	0	$a \frac{T_e}{K}$	∞
2	0	0	-

Table 7.1. – Erreur statique après asservissement.

7.9. Synthèse de correcteur

7.9.1. Correction de la boucle ouverte

- On a la FTBO $C(z)G(z)$.
- On choisit $C(z)$ pour avoir
 - n intégration pour améliorer la précision
 - un gain ajusté pour le bon amortissement
 - des zéros pour améliorer la stabilité et la rapidité
- On peut utiliser un PID numérique.

7.9.2. Modèle de référence

- On peut viser un modèle de référence H .
- Le plus souvent un second ordre avec $\zeta = 0,7$ pour la FTBF.
- On en déduit

$$C(z) = \frac{H(z)}{G(z)(1-H(z))}$$

- Le correcteur est réalisable si
 - C est causal, *i.e.*, si $\deg N < \deg D$
 - H est stable. Si il faut stabiliser G qui possède de pôle $|z_i| > 1$, alors C sera instable (seul) pour les compenser.

Troisième partie

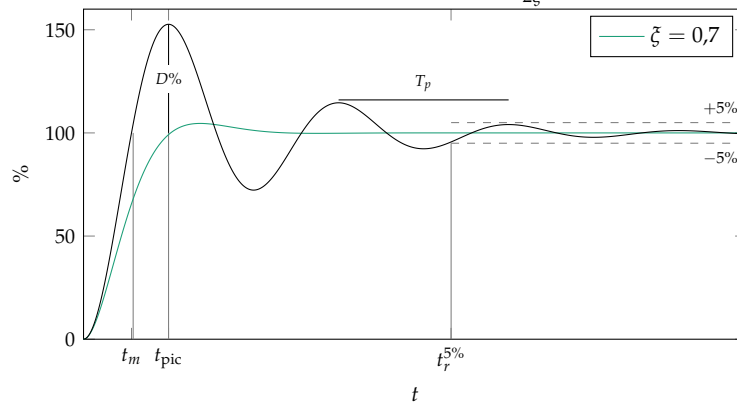
Annexes

Annexe A.

Second ordre amorti résonant

A.1. Caractéristiques de la réponse indicielle

Temps de montée	$t_m = \frac{1}{\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}} (\pi - \arccos \zeta)$
Temps de réponse à $n\%$ ($\zeta < 0,7$)	$t_r \approx \frac{1}{\omega_0 \zeta} \ln(100/n)$
Temps au pic	$t_{pic} = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}}$
Pseudopériode	$T_p = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}}$
Dépassement	$D\% = 100 e^{-\pi\zeta / \sqrt{1-\zeta^2}}$
Nombre d'oscillations	$n \approx Q = \frac{1}{2\zeta}$



A.2. Caractéristiques du gain fréquentiel

Pulsation de résonance	$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\zeta^2}$
Pulsation de coupure	$\omega_c = \omega_0 \sqrt{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{1 + (1 - 2\zeta^2)^2}}$
Facteur de résonance	$m = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1-\zeta^2}}$ $M_{dB} = 20 \log_{10}(m)$
Facteur de qualité	$Q = \frac{1}{2\zeta}$ $Q_{dB} = 20 \log_{10}(Q)$

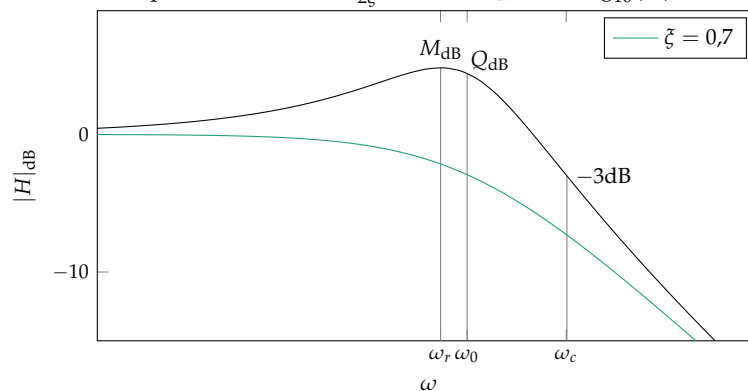


Table A.1. – Valeurs numériques pour un modèle du second ordre avec $0 < \zeta < 1$. La valeur $\zeta = 0,7$ est optimale pour le temps résiduel à 5%.

ζ	$t_m \omega_0$	$t_r^{5\%} \omega_0$	$t_{pic} \omega_0$	$T_p \omega_0$	$D\%$	$\frac{\omega_r}{\omega_0}$	$\frac{\omega_c}{\omega_0}$	$\frac{\omega_c}{\omega_r}$	M_{dB}
0,10	1,68	30	3,16	6,31	73	0,99	1,54	1,56	14,0
0,15	1,74	20	3,18	6,36	62	0,98	1,53	1,56	10,5
0,20	1,81	14	3,21	6,41	53	0,96	1,51	1,57	8,1
0,25	1,88	11	3,24	6,49	44	0,94	1,48	1,59	6,3
0,30	1,97	10,1	3,29	6,59	37	0,91	1,45	1,61	4,8
0,35	2,06	7,9	3,35	6,71	31	0,87	1,42	1,63	3,6
0,40	2,16	7,7	3,43	6,86	25	0,82	1,37	1,67	2,7
0,45	2,28	5,4	3,52	7,04	21	0,77	1,33	1,72	1,9
0,50	2,42	5,3	3,63	7,26	16	0,71	1,27	1,80	1,2
0,55	2,58	5,3	3,76	7,52	12,6	0,63	1,21	1,93	0,7
0,60	2,77	5,2	3,93	7,85	9,5	0,53	1,15	2,17	0,3
0,65	3,00	5,0	4,13	8,27	6,8	0,39	1,08	2,74	0,1
0,70	3,29	3,0	4,40	8,80	4,6	0,14	1,01	7,14	0
0,75	3,66	3,1	4,75	9,50	2,84		0,94		
0,80	4,16	3,4	5,24	10,50	1,52		0,87		
0,85	4,91	3,7	5,96	11,93	0,63		0,81		
0,90	6,17	4,0	7,21	14,41	0,15		0,75		
0,95	9,09	4,1	10,06	20,12	0,01		0,69		

Annexe B.

Décomposition en éléments simples

Soit H une fraction rationnelle complexe dont on souhaite faire la décomposition en éléments simples. On note

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

où les polynômes N et D sont respectivement le numérateur et le dénominateur de H et $p \in \mathbb{C}$ la variable de Laplace. On suppose que N et D n'ont pas de racines en commun, c'est-à-dire que H ne peut être simplifié. Si N est de plus haut degré que D , il faut commencer par une division euclidienne pour se ramener au cas d'un numérateur de plus bas degré que le dénominateur.

B.1. Division euclidienne

Cette opération consiste à trouver le couple de polynômes (Q, R) tel que $N(p) = Q(p)D(p) + R(p)$ avec $\deg(R) < \deg(D)$. Q et R sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne. La division étant effectuée, on peut écrire

$$H(p) = Q(p) + \frac{R(p)}{D(p)}.$$

On se trouve à présent dans le cas où le numérateur est de plus bas degré que le dénominateur, et on continue en renommant R en N .

B.2. Éléments simples

Dans \mathbb{C} , D peut être décomposé de manière unique sous la forme d'un produit de monômes, de sorte que

$$H(p) = \frac{N(p)}{a \prod_j (p - p_j)^{n_j}}$$

où a est une constante et les p_j sont les pôles de H . On appelle multiplicité d'un pôle le degré n_j du monôme auquel il appartient. Si ce degré vaut 1, on parle de pôle simple, sinon on parle de pôles multiples.

Dans \mathbb{C} , les éléments simples de H sont les fractions rationnelles de la forme

$$\frac{A_{jk}}{(p - p_j)^k} \quad \text{avec} \quad A_{jk} \in \mathbb{C}, \quad 1 \leq k \leq n_j.$$

c'est-à-dire les fractions rationnelles faisant intervenir les pôles de H individuellement, ou les monômes, à un degré inférieur ou égal à la multiplicité du pôle et avec un facteur scalaire pour chacun de ces degrés.

B.3. Décomposition en éléments simples

On montre que H peut se décomposer de manière unique sous la forme de la somme d'éléments simples de H

$$H(p) = \sum_j \sum_{k=1}^{n_j} \frac{A_{jk}}{(p - p_j)^k}.$$

Pôles simples

Pour des pôles simples ($n_j = 1$) on calcule les coefficients A_{jk} en multipliant H par $p - p_j$ puis en faisant $p = p_j$ ce qui annule les termes en $A_{i'j'}$ avec $j' \neq j$.

Pôles multiples

Pour le calcul du coefficient A_{jn_j} , on procède comme pour un pôle simple. Pour le calcul des autres coefficients, on peut soit

- regarder le comportement en $+\infty$,
- prendre des valeurs particulières,
- ou procéder par identification.

B.4. Exemple

Considérons

$$H(p) = \frac{2p + 3}{(p + 1)(p - 1)^2}.$$

Donc H possède un pôle simple $p_1 = 1$ et un pôle multiple $p_2 = -1$ de multiplicité 2.

1. D'après ce qui précède H peut être décomposé sous la forme

$$H(p) = \frac{A_1}{p + 1} + \frac{B_1}{p - 1} + \frac{B_2}{(p - 1)^2}.$$

2. Multiplions H par $p + 1$

$$(p + 1)H(p) = \frac{2p + 3}{(p - 1)^2} = A_1 + (p + 1) \frac{B_1}{p - 1} + (p + 1) \frac{B_2}{(p - 1)^2}.$$

En prenant $p = -1$ on obtient directement

$$A_1 = \frac{-2 + 3}{(-1 - 1)^2} = \frac{1}{4}.$$

3. De même en multipliant H par $(p - 1)^2$ puis en prenant $p = 1$ on obtient $B_2 = 5/2$.
4. Pour le calcul de B_1 on peut procéder par les trois méthodes de la partie B.3.

Passage à la limite : nous avons

$$\begin{aligned} & \lim_{p \rightarrow +\infty} pH(p) \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \left[\frac{A_1}{p+1} + \frac{B_1}{p-1} + \frac{B_2}{(p-1)^2} \right] \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \left[A_1 \frac{1}{\frac{1}{p} + 1} + B_1 \frac{1}{\frac{1}{p} - 1} \right] \\ &= A_1 + B_1. \end{aligned}$$

De plus

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} pH(p) = 0.$$

Donc

$$B_1 = -A_1 = -\frac{1}{4}.$$

Valeur particulière : nous avons

$$H(0) = 3 = A_1 - B_1 + B_2$$

donc

$$B_1 = \frac{1}{4} + \frac{5}{2} - 3 = -\frac{1}{4}.$$

Identification : le numérateur doit s'écrire

$$\begin{aligned} N(p) &= \frac{1}{4}(p-1)^2 + B_1(p-1)(p+1) + \frac{5}{2}(p+1) \\ &= \frac{1}{4}(p^2 - 2p + 1) + B_1(p^2 - 1) + \frac{5}{2}(p+1) \\ &= \left(B_1 + \frac{1}{4} \right) p^2 + \dots \\ &= 2p + 3 \end{aligned}$$

donc $B_1 = -1/4$.

La décomposition en éléments simples donne

$$\begin{aligned} H(p) &= \frac{2p+3}{(p+1)(p-1)^2} \\ &= \frac{1/4}{p+1} - \frac{1/4}{p-1} + \frac{5/2}{(p-1)^2}. \end{aligned}$$

Annexe C.

Le tableau de Routh-Hurwitz

Le tableau de Routh permet de mettre en œuvre le critère de Routh pour déterminer si un système est stable et sous quelles conditions. Les résultats du tableau reposent sur le critère général de stabilité, page 23. Des programmes informatiques, comme Scilab avec la fonction `routh.t`, peuvent assister au calcul.

1	3
1	K
3 - K	0
K	0

qui n'a aucun changement de signe dans la première colonne si $3 - K > 0$. Le système est stable en boucle fermée si $K < 3$.

Soit $H(p)$ la fonction de transfert du système et $D(p)$ son dénominateur, un polynôme de degré n . Sa forme développée, aisément calculable, s'écrit

$$D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0.$$

Le tableau se construit ainsi : les deux premières lignes se définissent à partir des a_n puis les suivantes se calculent successivement

a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	\dots
a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	\dots
A_1	A_2	\dots	
B_1	B_2	\dots	
\vdots	\vdots		
M_1	M_2	\dots	
N_1	N_2	\dots	
O_1	O_2	\dots	

avec les termes croisés

$$A_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} \quad A_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$B_1 = \frac{A_1 a_{n-3} - a_{n-1} A_2}{A_1} \quad O_1 = \frac{N_1 M_2 - M_1 N_2}{N_1}.$$

Théorème 7. *Le nombre de pôles à partie réelle positive de la fonction de transfert $H(p)$ est égal au nombre de changements de signe dans la première colonne. En conséquence, le système est stable si tous les coefficients de la première colonne sont positifs.*

Exemple

Soit un système, avec pour FTBO

$$G(p) = \frac{K}{p(p^2 + p + 3)},$$

placé dans une boucle à retour unitaire. La FTBF est alors

$$H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)} = \frac{K}{p(p^2 + p + 3) + K}$$

$$= \frac{N(p)}{D(p)}.$$

Le dénominateur de la FTBF est

$$D(p) = p(p^2 + p + 3) + K = p^3 + p^2 + 3p + K.$$

On applique le critère de Routh en construisant le tableau suivant

Annexe D.

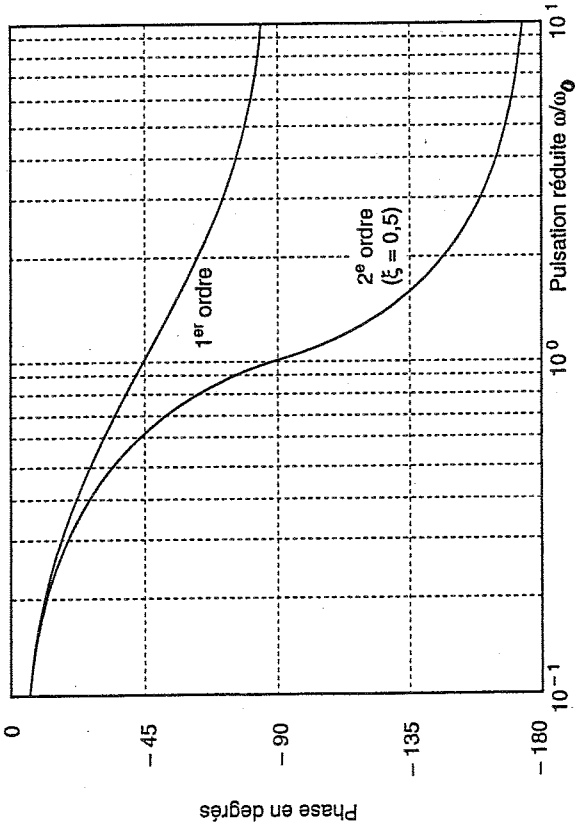
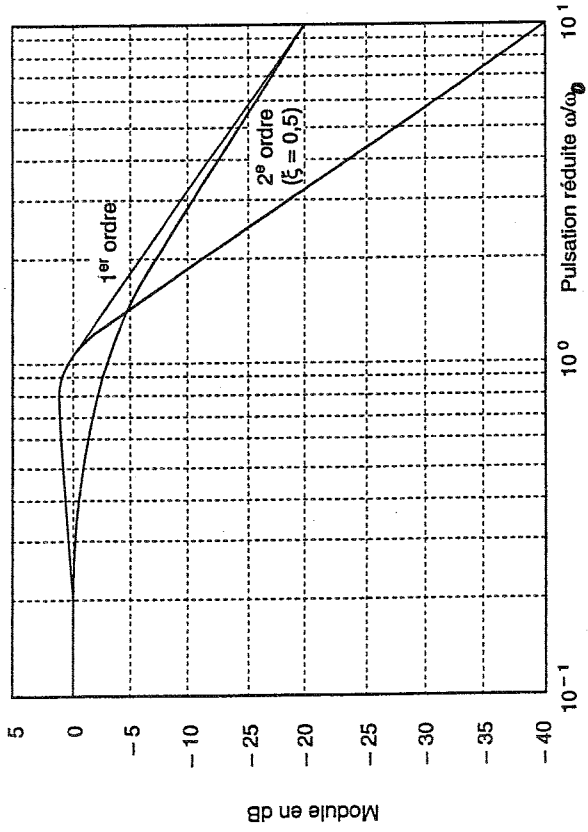
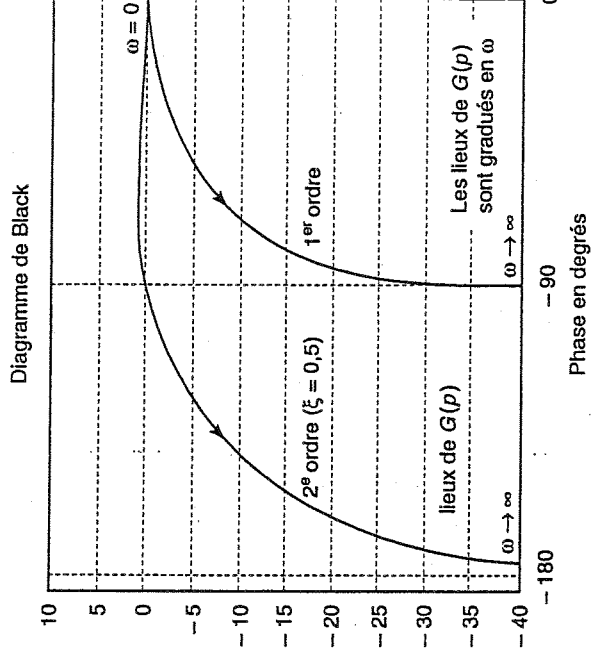
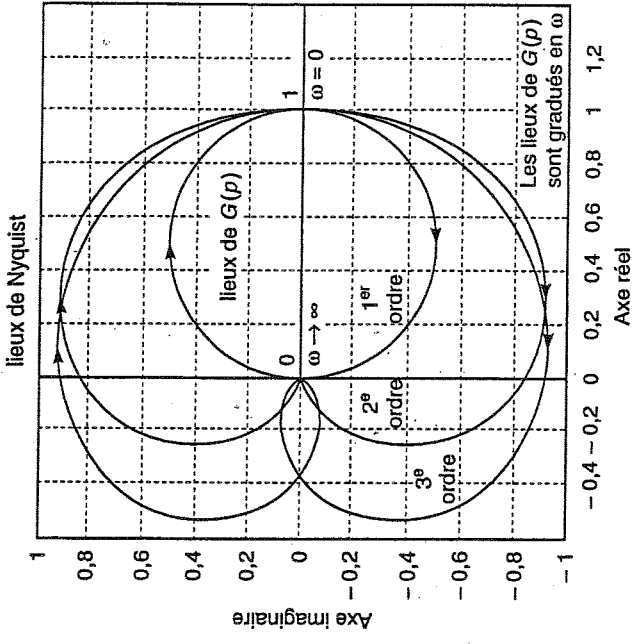
Lexique français-anglais

A	
abaque de Black-Nichols	<i>Nichols chart</i>
action directe	<i>feed-forward</i>
actionneur	<i>actuator</i>
amortissement	<i>damping</i>
analyse fréquentielle	<i>frequency analysis</i>
asservissement	<i>feedback control</i>
avance de phase	<i>phase lead</i>
avance / retard	<i>lead / lag</i>
B	
bande passante	<i>bandwidth</i>
bloqueur d'ordre zéro	<i>zero-order hold</i>
boucle ouverte	<i>open loop</i>
boucle fermée	<i>closed loop</i>
bruit aléatoire	<i>random noise</i>
C	
calculateur	<i>computer</i>
capteur	<i>sensor</i>
commande	<i>control</i>
consigne	<i>reference input</i>
constante de temps	<i>time constant</i>
contre-réaction	<i>feedback</i>
conv. analogique-numérique	<i>analog-to-digital converter</i>
conv. numérique-analogique	<i>digital-to-analog converter</i>
correcteur	<i>controller</i>
couple	<i>torque</i>
courbe de gain	<i>magnitude curve</i>
courbe de phase	<i>phase curve</i>
critère de stabilité	<i>stability criterion</i>
D	
dépassement	<i>overshoot</i>
déphasage	<i>dephasing</i>
deuxième ordre	<i>second order</i>
diagramme de Bode	<i>Bode plot</i>
E	
échantillonnage	<i>sampling</i>
échelon unité	<i>unit step</i>
erreur de poursuite	<i>tracking error</i>
erreur de régime permanent	<i>steady-state error</i>
erreur en vitesse	<i>velocity error</i>
F	
facteur d'amortissement	<i>damping ratio</i>
facteur de résonance	<i>resonant peak</i>
filtre antirepliement	<i>antialiasing filter</i>
fonction de transfert	<i>transfer function</i>
G – I – L	
gain	<i>gain</i>
intégrateur	<i>integrator</i>
linéarisation	<i>linearization</i>
P	
position des pôles	<i>pole locations</i>
poursuite	<i>tracking</i>
précision	<i>accuracy</i>
premier ordre	<i>first order</i>
processus	<i>plant</i>
R	
rampe	<i>ramp</i>
régime permanent	<i>steady state</i>
réglage du PID	<i>PID tuning</i>
régulateur	<i>regulator</i>
rejet de perturbation	<i>disturbance rejection</i>
réponse dynamique	<i>dynamic response</i>
réponse impulsionnelle	<i>impulse response</i>
réponse indicielle	<i>step response</i>
réponse transitoire	<i>transient response</i>
retard de phase	<i>phase lag</i>
retard pur	<i>pure time delay</i>
robustesse	<i>robustness</i>
S	
saturation	<i>saturation</i>
schéma bloc	<i>block diagram</i>
sensibilité	<i>sensitivity</i>
signal de commande	<i>control signal</i>
simulation	<i>simulation</i>
stabilité	<i>stability</i>
synthèse du correcteur	<i>compensator design</i>
système à retour unitaire	<i>unity feedback system</i>
système dynamique	<i>dynamical system</i>
système non linéaire	<i>non linear system</i>
T	
temps de montée	<i>rise time</i>
temps de pic	<i>peak time</i>
temps de réponse	<i>settling time</i>
transformation de Laplace	<i>Laplace transformation</i>
transformée de Laplace	<i>Laplace transform</i>
V	
valeurs propres	<i>eigenvalues</i>
vecteurs propres	<i>eigenvectors</i>

Annexe E.

Questions de cours

1. Décrire le principe de la régulation automatique par boucle d'asservissement en s'appuyant sur l'exemple d'une régulation de température avec un système à bilame (loi de commande en tout ou rien).
2. Dessiner le schéma de principe de la régulation d'altitude assurée par le pilote automatique d'un avion (capteur : altimètre, actionneur : gouvernail de profondeur). Indiquer toutes les grandeurs pertinentes dans le domaine temporel.
3. Citer les principales qualités d'un asservissement.
4. Qu'appelle-t-on le point de repos d'un système ? le régime statique ? le régime dynamique ?
5. Définir un système linéaire invariant par translation.
6. Définir la réponse impulsionnelle d'un système linéaire invariant par translation et donner la relation entre l'entrée, la sortie et la réponse pour un tel système.
7. Qu'est-ce qu'une fonction de transfert ?
8. Quelles sont les trois représentations graphiques classiques d'une fonction de transfert en automatique ?
9. Quel est le lien entre réponse impulsionnelle et fonction de transfert ? Le démontrer en considérant les signaux propres des systèmes linéaires invariants par translation.
10. Quelle est la définition du décibel (dB) ? Qu'est-ce que la fréquence de coupure à -3dB ?
11. Qu'est-ce qu'un système du premier ordre ? En donner la fonction de transfert. Tracer l'allure de la réponse indicielle d'un tel système.
12. Représenter les diagrammes de Bode d'un filtre passe-bas et d'un filtre passe-haut du premier ordre.
13. Quels sont en fonction du facteur d'amortissement ζ les différents régimes de fonctionnement d'un système du second ordre. Tracer l'allure de la réponse indicielle dans chaque cas.
14. Qu'appelle-t-on un second ordre équivalent (ou dominant) ?
15. Représenter un système bouclé à retour unitaire de fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$. Quelle est la fonction de transfert en boucle fermée $H(p)$?
16. Énoncer le critère général de stabilité des systèmes.
17. Énoncer le critère de Nyquist sur la stabilité des systèmes bouclés.
18. Énoncer le critère du Revers dans le plan de Black (faire un schéma). Définir graphiquement les marges de gain et de phase.
19. Qu'appelle-t-on la régulation ? la poursuite ? Dans les deux cas, quelle est la grandeur que l'on cherche à annuler ?
20. Quels sont les principes qui guident le choix d'une loi de commande ?
21. À quoi sert un correcteur dans un système bouclé ?
22. Qu'est-ce qu'un correcteur PID ? En donner la fonction de transfert.
23. Expliquer, en s'appuyant sur des schémas, les différences entre les asservissements analogiques, numériques et analogiques pilotés par ordinateur.



	Méthode de pompage (boucle fermée)	Méthode apériodique (boucle ouverte)	
	Ziegler-Nichols	Ziegler-Nichols	Chien-Hrones-Reswick
	Régulation ou poursuite	Régulation ou poursuite	Régulation Poursuite
PID	$K = 0,6 K_{osc}$ $T_i = 0,5 T_{osc}$ $T_d = 0,125 T_{osc}$	$K = 1,2 \frac{T}{\tau}$ $T_i = 2\tau$ $T_d = 0,5\tau$	$K = 0,95 \frac{T}{\tau}$ $T_i = 2,4\tau$ $T_d = 0,4\tau$
PI	$K = 0,45 K_{osc}$ $T_i = 0,83 T_{osc}$	$K = 0,9 \frac{T}{\tau}$ $T_i = 3,3\tau$	$K = 0,6 \frac{T}{\tau}$ $T_i = 4\tau$
P	$K = 0,5 K_{osc}$	$K = \frac{T}{\tau}$	$K = 0,3 \frac{T}{\tau}$

Type de correcteur	Avantages	Inconvénients
Proportionnel K_c K_c élevé K_c faible	Simplicité de réglage Meilleure précision et meilleure réjection des perturbations Moindre efficacité	Risque d'instabilité Meilleure stabilité
Correcteur à avance de phase	Améliore la rapidité et stabilise la boucle tout en permettant l'augmentation du gain de boucle Très utilisé	En principe pas d'effet direct sur la précision et la réjection, sauf si on augmente le gain
Correcteur à retard de phase	Améliore la précision et la réjection des perturbations On lui préfère le P.I.D.	Pas d'effet direct sur la rapidité
P.I.D.	Très utilisé sous forme standard car c'est un régulateur universel à trois paramètres de réglage Améliore la précision, la rapidité et la stabilité	Plus difficile à régler correctement, les effets des paramètres ne sont pas indépendants
P.I.R.	Réservé aux systèmes à fort retard pur	Un peu plus compliqué encore à régler Exige une identification fine du modèle du processus
Une intégration supplémentaire	Améliore la poursuite (en rampe) et la réjection	Accroît l'instabilité Exige une compensation d'avance de phase

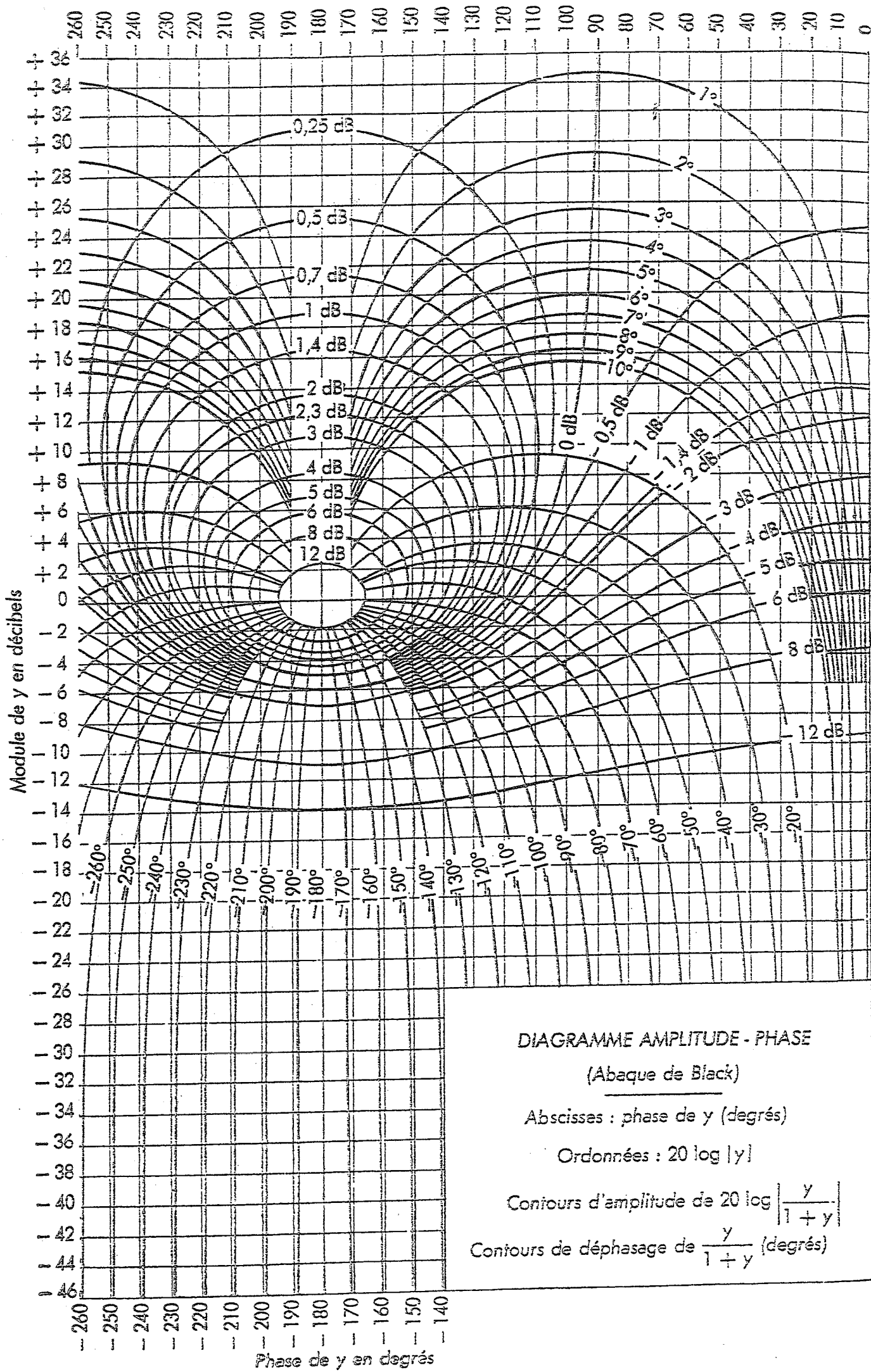


DIAGRAMME AMPLITUDE - PHASE
(Abaque de Black)

Abscisses : phase de y (degrés)

Ordonnées : $20 \log |y|$

Contours d'amplitude de $20 \log \left| \frac{y}{1+y} \right|$

Contours de déphasage de $\frac{y}{1+y}$ (degrés)