

Master 1 « Physique et Applications »
Master 1 « Mécanique »

Traitement du signal

A. Abergel — F. Orieux

2016 — 2017

orieux@l2s.centralesupelec.fr
Laboratoire des Signaux et Systèmes
3 rue Joliot-Curie, 91 192 Gif-sur-Yvette

Avant-propos

L'objet de ce document est de rassembler les concepts indispensables aux physiciens pour comprendre et utiliser les principaux outils de traitement du signal. Ce document devra être impérativement complété de figures tracées par le lecteur et indispensables pour bien comprendre les concepts. Il a été rédigé dans le but de permettre une mise en pratique rapide.

Il est important de garder en mémoire qu'un ordinateur fait exactement ce qui lui ait demandé d'exécuter. Si la demande n'est pas comprise, le résultat renvoyé ne le sera pas.

Table des matières

1	Introduction	7
1.1	Signal	7
1.2	Bruit et signal	7
1.3	Bruits et effets systématiques	7
1.4	Nature aléatoire des signaux	8
1.5	Classification des signaux	8
2	Processus aléatoires	11
2.1	Variables aléatoires	11
2.2	Exemples de lois de probabilité	15
2.3	Lois de probabilité à plusieurs variables	17
2.4	Coefficient de corrélation	20
2.5	Variables aléatoires indépendantes	20
2.6	Sommes de variables aléatoires	21
2.7	Application pour les mesures physiques	22
2.8	Théorème de la limite centrale	26
3	Outils mathématiques	27
3.1	Distribution de Dirac	27
3.2	Produit de convolution	28
3.3	Séries de Fourier	30
3.4	Transformées de Fourier	31
3.5	Énergie, puissance, corrélations	36
4	Du continu au discret	39
4.1	Échantillonnage d'un signal	39
4.2	Observation à temps fini	41
4.3	Transformée de Fourier échantillonnée d'un signal échantillonné	42
4.4	Transformée de Fourier Discrète (TFD)	43
4.5	Mise en oeuvre pratique d'une TFD	44
5	Systèmes Linéaires Invariants	45
5.1	Définitions	45
5.2	Relation entrée-sortie d'un SLI	45

5.3	Exemples de Systèmes Linéaires Invariants	46
5.4	Principe de causalité	49
5.5	Fonctions propres d'un système linéaire invariant	49
6	Filtrages	51
6.1	Apodisation : filtrage dans l'espace réel	51
6.2	Filtrage dans l'espace de Fourier	53
6.3	Calibration de fonctions de transfert inconnues	55
6.4	Filtres à déphasage linéaire	56
6.5	Fenêtres de convolution réalisables	56

Chapitre 1

Introduction

1.1 Signal

Les signaux sont les supports physiques de l'information, sous diverses formes (ondes sonores, rayonnement électromagnétique, courant électrique, imagerie CCD, *etc.*). Il est le plus souvent le résultat d'une mesure (souvent obtenu avec un instrument) et évolue. Un signal est émis par un système physique et dépend généralement de variables

- temporelle : parole, ...
- spatiale : image, ...
- spectrale : raie dans un spectre,
- ...

mais le signal d'intérêt peut être constant ¹.

1.2 Bruit et signal

Un signal est pratiquement toujours entaché d'un bruit. Ce bruit peut être intrinsèque au signal. Par exemple le bruit de photons est dû à la nature quantique du rayonnement électromagnétique.

Le bruit peut aussi se « rajouter » au signal émis. Dans une salle de cours, le signal est, habituellement, la parole de l'enseignant et le bruit le bavardage : la notion de signal et bruit est relative. Un signal transporte une information d'intérêt, un bruit a trait à une information nuisible.

1.3 Bruits et effets systématiques

Mettons-nous dans le cas d'une mesure physique. Supposons dans un premier temps que l'objet mesuré soit nul.

¹. Émission isotrope de corps noir dans une enceinte à l'équilibre thermique comme le corps noir cosmologique détecté en 1963 par Penzias et Wilson, la difficulté de la détection venant de l'isotropie du signal

Le résultat de la mesure n'est pas forcément nul : on parle de « biais » ou « d'erreur systématique » (signal d'obscurité de l'instrument, signaux parasites qui se superposent au signal réel, ...).

Supposons maintenant que l'objet mesuré ne soit pas nul, et répétons la mesure N fois de façon rigoureusement identique. On constate alors que les N mesures ne sont pas toutes égales. Elles fluctuent autour d'une certaine valeur « moyenne ». Par définition, ces fluctuations correspondent au bruit.

La valeur moyenne des fluctuations est nulle. La valeur moyenne d'un bruit est donc forcément nulle.

Le bruit peut être dû

- au système de mesure (bruit thermique, bruit de lecture, bruit de transmission, bruit de quantification, bruit « en $1/f$ », ...),
- ou à l'objet observé (nature fluctuante de celui-ci, bruit de photons),
- ou aux fluctuations des signaux parasites qui se superposent aux mesures.

1.4 Nature aléatoire des signaux

Par définition, un phénomène est « aléatoire » si on ne peut pas le reproduire identique à lui-même, si on ne peut pas le prédire.

Les signaux ont pratiquement toujours une nature aléatoire (le bruit), en plus d'une composante certaine ou déterministe (les biais ou erreurs systématiques).

La recherche d'un estimateur raisonnable de la grandeur physique étudiée demande de comprendre la nature de ces différentes contributions.

1.5 Classification des signaux

Un signal peut dépendre d'une ou plusieurs variables réelles. Leur représentation mathématique est constituée d'une fonction qui sera notée

$$S(t), S(x), S(x, y), S(\lambda), x(t), \dots$$

Considérons un signal dépendant d'une seule variable

- si le signal et la variable sont continus, le signal est « analogique »,
- si le signal est continu alors que la variable est discrète, le signal est « discret » ou « échantillonné »,
- si le signal est discret alors que la variable est continue, le signal est « quantifié »,

— si le signal et la variable sont discrets, le signal est « numérique ».

La nature fournit des signaux macroscopiquement continus. Dans les systèmes modernes, les signaux sont le plus souvent numérisés.

Chapitre 2

Processus aléatoires

2.1 Variables aléatoires

2.1.1 Définition

Une variable aléatoire (VA) $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ou \mathbb{N} est une application entre un ensemble d'évènements $\omega \in \Omega$ associé à une expérience, dont le résultat a un caractère imprévisible, et l'ensemble des nombres réels ou entiers. À chaque évènement de Ω correspond un nombre noté $x \in \mathbb{R}$ ou $n \in \mathbb{N}$. Une valeur de x ou n correspond à une *réalisation* de la variable aléatoire X .

La VA X est caractérisée par

- son domaine de définition D , soit l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre,
- si les résultats sont discrets, une fonction $P(X = n) = P(n)$ telle que

$$\forall n \in D, P(n) \in [0, 1] \quad \text{et} \quad \sum_{n \in D} P(n) = 1.$$

$P(n)$ est la *loi de probabilité* de la variable aléatoire X .

- si les résultats sont continus, une fonction $p(X = x) = p(x)$ telle que

$$\forall x \in D, p(x) \in [0, +\infty[\quad \text{et} \quad \int_D p(x) dx = 1.$$

$p(x)$ est la *densité de probabilité* de la variable aléatoire X .

Remarques

- $P(i)$ est la probabilité d'obtenir la valeur discrète i .
- $p(x) dx$ est la probabilité d'obtenir une valeur contenue dans l'intervalle $[x, x + dx]$ (ou dans l'intervalle $[x - dx/2, x + dx/2]$).
- L'unité de $p(x)$ est celle de $1/x$.

- La probabilité d'obtenir une valeur comprise entre n_1 et n_2 , ou entre x_1 et x_2 , s'écrit :

$$P(n_1 \leq X \leq n_2) = \sum_{n=n_1}^{n_2} P(n) \quad \text{et} \quad P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx.$$

- Si D n'est pas borné alors $p(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

2.1.2 Fonction de répartition

Par définition on a

$$F(n) = P(X \leq n) = \sum_{k=n_{\min}}^n P(k) \quad \text{et} \quad F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x p(x) dx.$$

On peut montrer facilement que

$$P(n_1 < X \leq n_2) = F(n_2) - F(n_1) \quad \text{et} \quad P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

2.1.3 Caractéristiques d'une variable aléatoire

Mode

C'est n telle que $P(n)$ est maximale, ou x telle que $p(x)$ est maximale.

Espérance (valeur moyenne)

C'est

$$\mathbb{E}[X] = \bar{n} = \sum_{n \in D} nP(n)$$

pour les lois discrètes et

$$\mathbb{E}[X] = \bar{x} = \int_D x p(x) dx$$

pour des lois continues.

Valeur médiane

C'est

$$n_m \quad \text{telle que} \quad P(X \leq n_m) = F(n_m) = \frac{1}{2}$$

ou

$$x_m \quad \text{telle que} \quad P(X \leq x_m) = F(x_m) = \frac{1}{2}.$$

Moyenne de l'écart à la moyenne

On note l'écart à la moyenne

$$\Delta_X = X - \bar{x} = x - \mathbb{E}[X].$$

La moyenne de l'écart à la moyenne

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Delta_X] &= \mathbb{E}[X - \mathbb{E}[X]] \\ &= \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[\mathbb{E}[X]] \\ &= \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X] = 0 \end{aligned}$$

est toujours nulle.

Moment d'ordre m

On définit les moments d'ordre m comme

$$\mathbb{E}[X^m] = \sum_{n \in D} n^m P(n)$$

pour les lois discrètes et

$$\mathbb{E}[X^m] = \int_D x^m p(x) dx$$

pour les lois continues. La valeur moyenne est le moment d'ordre 1.

Moment centré d'ordre m

On définit les moments centrés comme

$$\begin{aligned} \mu_m &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^m] \\ &= \sum_{n \in D} (n - \mathbb{E}[X])^m P(n) \end{aligned}$$

ou

$$\mu_m = \int_{x \in D} (x - \mathbb{E}[X])^m p(x).$$

Moment centré d'ordre 2 : la variance

On définit la variance comme

$$\begin{aligned}\mu_2 = \text{Var}(X) &= \mathbb{E}[\Delta_X^2] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2 - 2X\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2] \\ &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2\end{aligned}$$

La variance est la moyenne du carré de l'écart à la moyenne. On définit également l'écart-type, soit la racine carrée de la variance (*root mean square*, RMS).

$$\sigma = \text{Var}(X)^{\frac{1}{2}} = \mathbb{E}[\Delta_X^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Remarques :

- σ est dans la même unité que n ou x .
- σ s'appelle aussi la déviation standard.

Coefficient d'asymétrie et d'aplatissement

Appelés *skewness* et *kurtosis* en anglais, ils mesurent l'écart à une Gaussienne pour laquelle ils valent 0. L'asymétrie est définie comme

$$\gamma_1 = \mathbb{E}\left[\left(\frac{\Delta_X}{\sigma}\right)^3\right]$$

et l'aplatissement

$$\gamma_2 = \mathbb{E}\left[\left(\frac{\Delta_X}{\sigma}\right)^4\right] - 3.$$

2.1.4 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

On montre que

$$\forall k \in \mathbb{R}^+, P(|X - \mathbb{E}[X]| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}.$$

La probabilité de s'écarter de la valeur moyenne décroît et tend vers 0, d'autant plus vite que σ est petit.

2.2 Exemples de lois de probabilité

2.2.1 Distribution uniforme

La distribution uniforme est une densité constante sur un intervalle

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \forall x \in [a, b], \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Montrer que

$$\bar{x} = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad \sigma = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

2.2.2 Distribution exponentielle

La distribution exponentielle est la densité définie comme

$$p(x) = \begin{cases} ae^{-ax} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que $\bar{x} = \sigma = 1/a$.

2.2.3 Distribution de Laplace

La distribution de Laplace est la densité définie comme une double exponentielle symétrique sur tout \mathbb{R}

$$p(x) = \frac{1}{2b} e^{-\frac{|x-\mu|}{b}}.$$

Montrer que $\bar{x} = \mu$ et $\sigma = \sqrt{2}b$.

2.2.4 Loi gaussienne (ou normale)

On ne la présente plus

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}b} e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}}.$$

Montrer que $\bar{x} = a$ et $\sigma = b$. La largeur totale à mi-hauteur est $= 2\sqrt{2\ln 2}\sigma \approx 2,35\sigma$ (FWHM : Full Width at Half Maximum).

2.2.5 Loi de Poisson

La loi de Poisson est une loi de comptage discrète, paramétré par $\mu \in \mathbb{R}_+^*$,

$$P(n) = \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu}.$$

Montrer que $\bar{n} = \sigma^2 = \mu$.

C'est la probabilité d'obtenir n évènements dans un intervalle de temps donné, quand les évènements sont indépendants, arrivent à un taux constant et sont en nombre non limité. La loi de Poisson tend vers une loi normale lorsque $\mu \rightarrow +\infty$.

Exemples

- La probabilité de trouver n molécules dans un petit volume v d'un gaz parfait contenu dans une enceinte de volume V avec N molécules ($p = v/V$ et $N \gg 1$).
- Probabilité de recevoir exactement n photons émis par une source stationnaire dans un intervalle de temps donné.

2.2.6 Loi de Bernoulli

Pour une expérience dont le résultat ne peut prendre que deux valeurs possibles (A ou B — *Vrai* ou *Faux* — 0 ou 1 — *etc.*), on définit la VA n avec

$$\begin{aligned} P(n = A) &= p, \\ P(n = B) &= 1 - p. \end{aligned}$$

Montrer que $\bar{n} = p$ et $\sigma_n = \sqrt{p(1-p)}$.

2.2.7 Loi binomiale

On répète N fois l'expérience de Bernoulli. La probabilité d'obtenir n fois A est

$$P(n = A) = C_N^n p^n (1-p)^{N-n} \quad \text{avec} \quad C_N^n = \frac{N!}{n!(N-n)!}.$$

Montrer que $\bar{n} = Np$ et $\sigma_n = \sqrt{Np(1-p)}$. Si $N \rightarrow +\infty$ avec $Np \ll N^1$, alors cette loi tend vers une loi de Poisson de paramètre $\mu = Np$.

1. et nécessairement $p \rightarrow 0$.

2.2.8 Loi de Cauchy

Appelée aussi loi de Lorentz, cette loi est suivie par le quotient de deux variables aléatoires normales et indépendantes

$$p(x) = \frac{a}{\pi} \cdot \frac{1}{(x - x_0)^2 + a^2}$$

Cette loi n'a pas de moments (les sommes divergent), donc pas de moyenne ou d'écart-type. La loi est cependant centrée sur x_0 et la largeur à mi-hauteur est $2a$.

2.3 Lois de probabilité à plusieurs variables

Nous ne considérerons que les cas continus pour simplifier la lecture, les résultats s'appliquant aussi aux lois discrètes.

2.3.1 Définition

Soient X et Y deux variables aléatoires. Le couple (X, Y) forme aussi une variable aléatoire à laquelle est associée une certaine densité de probabilité $p_{X,Y}$, qui vérifie la condition de normalisation

$$\iint_D p_{X,Y}(x, y) \, dx \, dy = 1,$$

où D représente l'ensemble des valeurs possibles du couple (X, Y) . On peut généraliser à N variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_N .

Supposons connues les densités p_X et p_Y associé à X et Y . Peut-on écrire simplement la densité $p_{X,Y}$? Dans le cas général, la réponse est *non*. L'inverse est vrai par contre.

2.3.2 Loi marginale

Connaissant $p_{X,Y}$ on peut calculer la densité de probabilité pour X ou Y seule

$$p_X(x) = \int_{D_y} p_{X,Y}(x, y) \, dy \quad \text{et} \quad p_Y(y) = \int_{D_x} p_{X,Y}(x, y) \, dx$$

où D_x et D_y représente l'ensemble des valeurs possibles de x et y . Par définition, on appelle p_X et p_Y les lois marginales pour X et Y .

Attention, il ne faut pas confondre p_X avec la loi de probabilité de x sachant une valeur donnée de y notée $p_{X|Y}$. La loi $p_{X|Y}$ est la loi de probabilité conditionnelle de X conditionnellement à Y .

Les lois p_X et $p_{X|Y}$ sont reliées par la règle de Bayes

$$p_{X|Y} = \frac{p_{X,Y}}{p_Y}$$

qui se déduit de la condition de normalisation de $p_{X|Y}$. En effet, il existe une constante réelle positive α telle que $p_{X|Y} = \alpha p_{X,Y}$. On peut donc écrire

$$\begin{aligned} \int_{D_x} p_{X|Y}(x) dx &= 1 \\ &= \alpha \int_{D_x} p_{X,Y}(x, y) dx \\ &= \alpha p_Y(y). \end{aligned}$$

2.3.3 Moyennes et Moments

Soit $g(x, y)$ une fonction de x et y . La valeur moyenne de $g(x, y)$ s'écrit

$$\overline{g(x, y)} = \iint_D g(x, y) p(x, y) dx dy.$$

Valeur moyenne d'une somme

La moyenne d'une somme de VA

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X + Y] &= \iint_D (x + y) p(x, y) dx dy \\ &= \iint_D x p(x, y) dx dy + \iint_D y p(x, y) dx dy \\ &= \int_{D_x} x \left[\int_{D_y} p(x, y) dy \right] dx + \int_{D_y} y \left[\int_{D_x} p(x, y) dx \right] dy \\ &= \int_{D_x} x p_X(x) dx + \int_{D_y} y p_Y(y) dy \\ &= \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] \end{aligned}$$

est la somme des moyennes de chaque VA, avec D_x (D_y) l'ensemble des valeurs possibles de x (y). La valeur moyenne d'une somme est toujours égale à la somme des valeurs moyennes, par linéarité de l'espérance.

Valeur moyenne d'un produit

On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[XY] &= \iint_D xy p(x, y) \, dx \, dy \\ &= \int_{D_x} x \left(\int_{D_y} y p(x, y) \, dy \right) dx.\end{aligned}$$

Dans le cas général, on ne peut pas aller plus loin, et donc la valeur moyenne d'un produit n'est pas égale au produit des valeurs moyennes.

Moments d'un couple de variables aléatoires

On a le moment d'ordre n et m

$$\mathbb{E}[X^n Y^m] = \mu'_{nm}$$

et le moment centré d'ordre n et m

$$\mathbb{E}[\Delta_X^n \Delta_Y^m] = \mu_{nm}.$$

Cas particuliers

On dispose des relations entre les moments

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[\Delta_X^2] = \mu_{20},$$

$$\text{Var}(Y) = \mathbb{E}[\Delta_Y^2] = \mu_{02}.$$

On s'intéresse souvent à la *covariance* de X et Y

$$\begin{aligned}\text{cov}(X, Y) &= \mathbb{E}[\Delta_X \Delta_Y] = \mu_{11} \\ &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] \\ &= \mathbb{E}[XY - \mathbb{E}[X]Y - X\mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]] \\ &= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] \\ &= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].\end{aligned}$$

2.4 Coefficient de corrélation

Le mot « corrélation » est emprunté au latin depuis le XV^e siècle, de *cum* (co) et *relatio* (relation). Il signifie proprement « relation mutuelle ». Le coefficient de corrélation entre deux variables aléatoires X et Y s'écrit

$$r = \frac{\mu_{11}}{\sqrt{\mu_{20}\mu_{02}}} = \frac{\mathbb{E}[\Delta_X \Delta_Y]}{\sqrt{\mathbb{E}[\Delta_X^2] \mathbb{E}[\Delta_Y^2]}} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}}. \quad (2.1)$$

À partir de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left[\int_a^b f(x)g(x) \, dx \right]^2 \leq \int_a^b f(x)^2 \, dx \int_a^b g(x)^2 \, dx,$$

on montre que $|r| \leq 1$.

Dans le cas particulier où $y = ax + b$, où a est une constante réelle, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Delta_X \Delta_Y] &= a \mathbb{E}[\Delta_X^2] \\ \mathbb{E}[\Delta_Y^2] &= a^2 \mathbb{E}[\Delta_X^2] \\ r &= a/|a| = \pm 1. \end{aligned}$$

Conclusions

- r est sans unité, et mesure la dépendance affine de x et y . On a toujours $|r| \leq 1$.
- Si X et Y sont parfaitement corrélées ($y = ax + b$, où $a > 0$), alors $r = 1$.
- Si X et Y sont parfaitement anticorrélées ($a < 0$), alors $r = -1$.
- Si $r = 0$, alors on dit que X et Y sont « non corrélées », ou « décorré-
lées », mais *en aucun* cas indépendant.

2.5 Variables aléatoires indépendantes

Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si la densité de probabilité du couple (x, y) peut se décomposer comme $p(x, y) = p_X(x) p_Y(y)$. Pour N variables aléatoires indépendantes, on a

$$p(x_1, x_2, \dots, x_N) = p_1(x_1) p_2(x_2) \dots p_N(x_N).$$

Propriétés

- Deux VA indépendantes sont non corrélées

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\Delta_X \Delta_Y] &= \iint_D (x - \mathbb{E}[x])(y - \mathbb{E}[y]) p(x, y) \, dx \, dy \\ &= \int_{D_x} (x - \mathbb{E}[x]) p_X(x) \, dx \int_{D_y} (y - \mathbb{E}[y]) p_Y(y) \, dy.\end{aligned}$$

Il est facile de voir que ces deux intégrales sont nulles

$$r = \frac{\mathbb{E}[\Delta_X \Delta_Y]}{\sqrt{\mathbb{E}[\Delta_X^2] \mathbb{E}[\Delta_Y^2]}} = 0.$$

- La réciproque est fautive : deux variables aléatoires peuvent être non corrélées ($r = 0$), mais non indépendantes $p(x, y) \neq p_X(x) p_Y(y)$.
- Si X et Y sont indépendantes, alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[XY] &= \iint_D xy p(x, y) \, dx \, dy \\ &= \int_{D_x} x p_X(x) \, dx \int_{D_y} y p_Y(y) \, dy \\ &= \mathbb{E}[X] \mathbb{E}[Y].\end{aligned}$$

2.6 Sommes de variables aléatoires

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires d'écart-type σ_1 et σ_2 . Formons la variable aléatoire $Y = X_1 + X_2$. On a alors

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2].$$

De plus comme

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\Delta_Y^2] &= \mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y])^2] \\ &= \mathbb{E}[(X_1 + X_2 - \mathbb{E}[X_1] - \mathbb{E}[X_2])^2] \\ &= \mathbb{E}[(\Delta_{X_1} + \Delta_{X_2})^2] \\ &= \mathbb{E}[\Delta_{X_1}^2] + \mathbb{E}[\Delta_{X_2}^2] + 2 \mathbb{E}[\Delta_{X_1} \Delta_{X_2}]\end{aligned}$$

et donc

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + 2 \text{cov}(X_1, X_2).$$

Dans le cas général, la moyenne d'une somme de VA est toujours égale à la somme des moyennes. Par contre, la variance d'une somme de VA n'est pas égale à la somme des variances.

Si X_1 et X_2 sont *non corrélées* alors $\mathbb{E}[\Delta_{X_1} \Delta_{X_2}] = 0$ et

$$\begin{aligned}\sigma_Y^2 &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \\ \sigma_Y &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}.\end{aligned}$$

La variance d'une somme de VA non corrélées est la somme des variances.

Application

Considérons à nouveau N variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_N identiques et non corrélées avec

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, N\}, \quad \mathbb{E}[X_i] = \mu \quad \text{et} \quad \sigma_i = \sigma.$$

Formons $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_N$. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y] &= N\mu, \\ \sigma_Y &= \sqrt{N}\sigma\end{aligned}$$

car les variables aléatoires X_i sont de plus non corrélées. Pour

$$S = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_N}{N}$$

on aura donc

$$\mathbb{E}[S] = \mu \quad \text{et} \quad \sigma_s = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}.$$

2.7 Application pour les mesures physiques

Effectuons N mesures successives, identiques et indépendantes. Ces mesures sont bien sûr entachées d'un certain bruit.

Les N valeurs mesurées x_1, x_2, \dots, x_N correspondent à N réalisations particulières de N variables aléatoires que nous noterons X_1, X_2, \dots, X_N . Elles sont *identiques*, *indépendantes*, et toutes de même valeur moyenne μ et de même écart-type σ . L'écart-type σ est généralement utilisé pour estimer le bruit de chaque mesure, mais pas toujours (voir section 2.7.4).

Notre objectif est de déterminer avec la meilleure précision possible μ à *priori* inconnue. Il faut aussi donner une estimation de l'incertitude sur la valeur estimée de μ .

2.7.1 Estimateur de μ

L'intuition est de prendre la moyenne arithmétique des N mesures, appelée parfois la moyenne « expérimentale », ou « empirique »

$$s = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}{N}.$$

Celle-ci est une réalisation particulière de la variable aléatoire S

$$S = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_N}{N}.$$

On sait que s est un estimateur « non biaisé » de μ , car $\mathbb{E}[S] = \mu$ (voir section 2.6).

Puisque les N variables aléatoires $\{X_i\}$ sont indépendantes, elles sont non corrélées, et donc l'écart-type de S s'écrit

$$\sigma_S = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}.$$

On constate que σ_S est d'autant plus petit que N est grand.

Nous voyons donc que la moyenne arithmétique des N mesures est une réalisation particulière d'une variable aléatoire S de valeur moyenne $\mathbb{E}[S] = \mu$ et dont l'écart-type σ_S diminue comme N augmente. On obtient donc un résultat d'autant plus précis que N est grand.

Si σ est connu, on peut calculer finalement σ_S qui donne une estimation du bruit sur la mesure de μ . Sinon, il faut estimer σ à partir des mesures.

2.7.2 Estimateur de σ

Considérons la quantité v calculée à partir des mesures $\{x_i\}$

$$v = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - s)^2 \quad \text{où} \quad s = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i.$$

La grandeur v est une réalisation particulière de la variable aléatoire

$$V = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - s)^2.$$

Sa valeur moyenne s'écrit

$$\mathbb{E}[V] = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \mathbb{E}[(x_i - s)^2].$$

Or on a

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[(X_i - S)^2] &= \mathbb{E}[(X_i - \mu - (S - \mu))^2] \\
 &= \mathbb{E}\left[\left[X_i - \mu - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (X_j - \mu)\right]^2\right] \\
 &= \mathbb{E}[(X_i - \mu)^2] + \\
 &\quad \frac{1}{N^2} \mathbb{E}\left[\sum_{j,k=1}^N (X_j - \mu)(X_k - \mu)\right] - \\
 &\quad \frac{2}{N} \mathbb{E}\left[(X_i - \mu) \sum_{j=1}^N (X_j - \mu)\right].
 \end{aligned}$$

De plus, les N variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_N sont non corrélées donc

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}\left[\sum_{j,k=1}^N (X_j - \mu)(X_k - \mu)\right] &= \sum_{j,k=1}^N \mathbb{E}[(X_j - \mu)(X_k - \mu)] \\
 &= \sum_{j=1}^N \mathbb{E}[(X_j - \mu)^2] \\
 &= N\sigma^2.
 \end{aligned}$$

De plus

$$\mathbb{E}[(X_i - \mu)^2] = \sigma^2.$$

On obtient donc

$$\mathbb{E}[(X_i - S)^2] = \sigma^2 + \frac{1}{N^2} N\sigma^2 - \frac{2}{N} \sigma^2 = \frac{N-1}{N} \sigma^2$$

soit

$$\mathbb{E}[V] = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \mathbb{E}[(X_i - S)^2] = \frac{N}{N-1} \times \frac{N-1}{N} \sigma^2 = \sigma^2.$$

La relation $\mathbb{E}[V] = \sigma^2$ montre que v est un estimateur non biaisé de σ^2 (variance des variables aléatoires X_i). On l'appelle parfois la « variance expérimentale ». Dans la pratique \sqrt{v} est pris comme estimateur de σ : c'est l'écart-type expérimental².

2. On peut montrer que \sqrt{v} n'est pas un estimateur non biaisé de σ_X , car $\mathbb{E}[\sqrt{V}] \neq \sigma$.

2.7.3 Synthèse

La valeur moyenne du signal est estimée en faisant la moyenne arithmétique des N mesures

$$s = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}.$$

Si l'écart-type σ des mesures individuelles n'est pas connu, on l'estime à partir de

$$\sigma \simeq \sqrt{\bar{v}} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - s)^2}.$$

L'incertitude sur l'estimation de la valeur moyenne s se calcule comme

$$\sigma_s = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}.$$

2.7.4 Mises en garde

Il faut bien garder en mémoire les hypothèses de départ indispensables pour établir les résultats précédents.

Les N mesures sont identiques

On suppose donc que le processus observé est stationnaire, qu'il n'évolue pas dans le temps. Si le signal mesuré présente une dérive, par exemple à cause de l'instrument, on n'est plus dans le cas stationnaire et l'écart-type σ ne donne plus une bonne estimation du bruit par mesure. De même si le signal présente des événements rares à valeurs particulières dus par exemple à des parasites.

Dans la pratique, il est prudent de systématiquement tracer le signal mesuré et son histogramme pour s'assurer que le processus étudié apparaît effectivement stationnaire.

Les N mesures sont indépendantes (donc non corrélées)

On suppose donc que le résultat d'une mesure donnée ne dépend pas des résultats des autres mesures, précédentes ou suivantes. Sans cette hypothèse, le calcul de σ_s n'est pas simple, car il faut prendre en compte les covariances entre les variables aléatoires associées aux différentes mesures. Dans la pratique, il n'est pas toujours facile de s'assurer de la non-corrélation parfaite des mesures.

2.7.5 Coefficient de corrélation expérimental

Le coefficient de corrélation r de deux séries de mesures x_1, x_2, \dots, x_N et y_1, y_2, \dots, y_N peut être calculé avec la formule 2.1 en utilisant les estimateurs suivants pour les variances et la covariance

$$v_x = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - s_x)^2 \quad \text{où} \quad s_x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i,$$

$$v_y = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - s_y)^2 \quad \text{où} \quad s_y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i,$$

$$\text{cov} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - s_x)(y_i - s_y).$$

2.8 Théorème de la limite centrale

Soient N variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_N indépendantes et identiquement distribuées, et soit la somme des VA $S = X_1 + X_2 + \dots + X_N$. On ne connaît que la moyenne μ et l'écart-type σ des VA X_i . On sait déjà que

$$\mathbb{E}[S] = N\mu \quad \text{et} \quad \sigma_S = \sqrt{N}\sigma.$$

Le théorème de la limite centrale affirme que lorsque $N \rightarrow +\infty$, la densité de probabilité de S tend vers une loi gaussienne de moyenne μ et d'écart-type σ_s .

Ce résultat important s'applique, quelle que soit la densité de probabilité des variables X_1, X_2, \dots, X_N .

Plus généralement, quand un processus physique est issu d'un grand nombre de processus physiques indépendants dont aucun ne contribue majoritairement, alors la densité de probabilité qui lui est associée est gaussienne.

Chapitre 3

Outils mathématiques

3.1 Distribution de Dirac

3.1.1 Définition

Le physicien anglais Oliver Heaviside (1850 – 1925) introduit la fonction de Heaviside (échelon unité) en 1894

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \forall x \in]-\infty, 0[, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.1)$$

Cette fonction n'admet pas de dérivée en 0 au sens des fonctions usuelles. La dérivée de la fonction de Heaviside a été réintroduire par Paul Dirac (1902 – 1984) en 1926 pour les besoins de la mécanique quantique et notée δ . Laurent Schwartz (1915 – 2002) donnera un cadre rigoureux en construisant la théorie des distributions.

La distribution de Dirac vérifie, $\forall a \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \delta(x) dx &= U(a) - U(-a) \\ &= 1. \end{aligned}$$

3.1.2 Fonctions tendant vers une distribution de Dirac

La distribution de Dirac δ peut être considérée comme la limite

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta^{(\epsilon)}(x) \quad \text{avec} \quad \delta^{(\epsilon)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & \forall x \in [-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Beaucoup d'autres fonctions tendent vers δ , en particulier (avec $\epsilon \rightarrow 0^+$)

— la gaussienne centrée sur 0 et d'écart type $\sigma = \epsilon/\sqrt{2}$

$$\rho(x) = \frac{1}{\epsilon\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{\epsilon^2}},$$

— le sinus cardinal

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi\epsilon} \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{\epsilon}\right),$$

— l'exponentielle décroissante

$$\rho(x) = \frac{1}{2\epsilon} e^{-\frac{|x|}{\epsilon}}.$$

3.1.3 Propriétés

Soit f un signal quelconque. On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0).$$

Plus généralement, $\forall a \in \mathbb{R}^+$, on a

$$\int_{-a}^a \delta(x) f(x) dx = f(0)$$

et, $\forall \tau \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - \tau) f(x) dx = f(\tau).$$

On montre, $\forall a \in \mathbb{R}^*$, que

$$\delta\left(\frac{x}{a}\right) = a\delta(x).$$

3.1.4 Peigne de Dirac

Le peigne de Dirac est défini comme la somme de Dirac décalés

$$\sqcup\sqcup_T(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x - kT)$$

où T est un nombre réel positif. La distribution $\sqcup\sqcup_T$, périodique de période T , est essentielle pour l'échantillonnage des signaux continus (voir partie 4.1.1).

3.2 Produit de convolution

3.2.1 Définition

Soient f et g deux signaux dépendant d'une variable réelle x . Leur produit de convolution est défini comme

$$(f \otimes g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(x - u) du.$$

3.2.2 Propriétés

Commutativité :

$$\begin{aligned}(g \otimes f)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)f(x-u) du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-u')f(u') du' \\ &= (f \otimes g)(x).\end{aligned}$$

Distributivité :

$$f \otimes (g+h) = f \otimes g + f \otimes h.$$

Associativité :

$$f \otimes (g \otimes h) = (f \otimes g) \otimes h.$$

Élément neutre : l'élément neutre de la convolution est la distribution de Dirac

$$\begin{aligned}(f \otimes \delta)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(u)f(x-u) du \\ &= f(x).\end{aligned}$$

Par conséquent

— la convolution par une distribution de Dirac centrée sur τ donne

$$(f \otimes \delta_\tau)(x) = f(x - \tau)$$

avec $\delta_\tau(x) = \delta(x - \tau)$. La fonction f est décalée de τ .

— la convolution par un peigne de Dirac de période T donne

$$(f \otimes \sqcup\sqcup_T)(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x) \otimes \delta(x - kT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x - kT).$$

La fonction f est « périodisée », avec la période T . Ce résultat est *essentiel* pour l'étude de l'échantillonnage d'un signal continu (voir partie 4.1.2).

3.3 Séries de Fourier

Soit f une fonction d'une variable réelle x périodique de période T . Si f est intégrable et

- f est continue et pourvue d'une dérivée première continue, sauf en un nombre fini de points sur une période T , points en lesquels f ou f' ont une discontinuité de première espèce (limites finies à droite ou à gauche),
- ou f est à variations bornées sur une période T ,

alors en tout point de continuité on peut écrire

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2i\pi \frac{n}{T} x} \quad \text{avec} \quad c_n = \frac{1}{T} \int_T e^{-2i\pi \frac{n}{T} x} f(x) dx.$$

La fonction f , périodique de période T , se décompose comme une somme d'exponentielles complexes de fréquences $\nu_n = \frac{n}{T}$. Notamment, $n = 0$ est le terme constant avec $e^0 = 1$ et $c_0 = \int_T f(x) dx / T$; $n = 1$ correspond au premier harmonique (ou « fondamental »); et $n \geq 2$ les harmoniques.

On appelle la suite

- $\{c_n = |c_n| e^{i\varphi_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ la décomposition en série de Fourier de f ,
- $\{|c_n|\}_{n \in \mathbb{N}}$ le spectre d'amplitude de f ,
- $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ le spectre de phase de f .

Pratiquement, on peut représenter les spectres d'amplitude ou de phase comme une série de raies écartées de $\frac{1}{T}$ sur l'axe des fréquences.

Coefficients trigonométriques

Avec $a_0 = c_0$, $a_n = c_n + c_{-n}$ et $b_n = i(c_n - c_{-n})$, on écrit également

$$\begin{aligned} f(x) &= c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[c_n e^{2i\pi \frac{n}{T} x} + c_{-n} e^{-2i\pi \frac{n}{T} x} \right] \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos\left(2\pi \frac{n}{T} x\right) + b_n \sin\left(2\pi \frac{n}{T} x\right) \right]. \end{aligned}$$

On a donc

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(x) \, dx,$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_T f(x) \cos\left(2\pi \frac{n}{T} x\right) \, dx,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_T f(x) \sin\left(2\pi \frac{n}{T} x\right) \, dx.$$

En particulier, $a_n = 0, \forall n$, si f est impaire. De même, $b_n = 0, \forall n$, si f est paire.

3.4 Transformées de Fourier

La transformation de Fourier généralise la notion de série de Fourier aux fonctions non périodiques.

3.4.1 Définition

Si f est bornée, sommable ($\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \, dx$ est fini), et possède un nombre fini d'extrême et de discontinuités, alors on peut définir sa transformée de Fourier

$$F(\nu) = \mathcal{F}[f] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i2\pi\nu x} \, dx.$$

Si de plus f est de carré sommable ($\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \, dx$ est fini), alors

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) e^{i2\pi\nu x} \, d\nu.$$

Remarques

- Connaître $f(x)$ est équivalent à connaître $F(\nu)$.
- On parle souvent de
 - l'espace réel (ou direct), soit l'espace des valeurs de x ,
 - l'espace de Fourier (ou espace des fréquences), soit l'espace des valeurs de ν .
- f et F sont des fonctions réelles ou complexes d'une variable réelle (x et ν).

- Une fonction périodique n'est pas sommable : elle n'a donc pas de transformée de Fourier, mais une décomposition en série de Fourier ¹.
- D'autres définitions sont possibles. En particulier, les signes dans les exponentielles sont parfois inversés, et le facteur 2π n'est pas toujours présent dans les exponentielles.

3.4.2 Propriétés

Linéarité

Soit $F = \mathcal{F}[f]$ et $G = \mathcal{F}[g]$, alors $\mathcal{F}[af + bg] = aF + bG$, où a et b sont deux constantes réelles ou complexes.

Règles de parité

$f(x)$	$F(v)$
Réelle paire	Réelle paire
Réelle impaire	Imaginaire impaire
Imaginaire paire	Imaginaire paire
Réelle quelconque	Partie réelle paire et partie imaginaire impaire

Un signal physique est une grandeur réelle. Sa transformée de Fourier est à valeurs complexes, mais la partie réelle est paire et la partie imaginaire impaire. On dit que $F(v)$ est à symétrie hermitienne soit

$$F(v) = F^*(-v).$$

Similitude

Une *dilatation* (contraction) dans l'espace réel est une *contraction* (dilatation) dans l'espace des fréquences

$$g(x) = f(ax) \quad \begin{matrix} \mathcal{F} \\ \xleftrightarrow{\quad} \\ \mathcal{F}^{-1} \end{matrix} \quad G(v) = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{v}{a}\right).$$

¹. Ce problème ne se pose pas au sens des distributions. Par exemple, les fonctions constantes, ou sinus, sont périodiques. Elles ont cependant une transformée de Fourier qui est une distribution et non une fonction.

Translation dans l'espace réel

Une *translation* dans l'espace réel

$$g(x) = f(x - a)$$

est un *déphasage* dans l'espace des fréquences

$$\begin{aligned} G(v) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - a)e^{-2i\pi vx} \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-2i\pi v(u+a)} \, du \\ &= e^{-2i\pi va} F(v). \end{aligned}$$

Translation dans l'espace des fréquences

Une *translation* dans l'espace de Fourier est une *multiplication* par une sinusoïde dans l'espace réel

$$\begin{aligned} G(v) &= F(v - v_0) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2i\pi(v-v_0)x} \, dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{-2i\pi vx} \, dx \end{aligned}$$

avec

$$g(x) = e^{2i\pi v_0 x} f(x).$$

Ce résultat est très utilisé dans les systèmes de communication pour centrer un signal autour d'une fréquence porteuse.

Dérivation

La dérivation est une multiplication par v ou x

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{F}^{-1}} 2i\pi v F(v), \\ -2i\pi x f(x) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{F}^{-1}} \frac{dF}{dv}. \end{aligned}$$

Cette propriété est très utile pour la résolution d'équation différentielle.

3.4.3 Exemples importants

Distribution de Dirac

$$\begin{aligned} \delta(x) &\stackrel{\mathcal{F}}{\underset{\mathcal{F}^{-1}}{\longleftrightarrow}} 1, \\ 1 &\stackrel{\mathcal{F}}{\underset{\mathcal{F}^{-1}}{\longleftrightarrow}} \delta(\nu). \end{aligned}$$

On en déduit

$$\delta(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi\nu x} dx \quad \text{ou} \quad \delta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi\nu x} d\nu,$$

ce qui donne une définition de la distribution de Dirac.

Distribution de Dirac décalé

$$\delta(x - a) \stackrel{\mathcal{F}}{\underset{\mathcal{F}^{-1}}{\longleftrightarrow}} e^{-2i\pi a \nu}.$$

Sinus et cosinus

$$\cos(2\pi\nu_0 x) \stackrel{\mathcal{F}}{\underset{\mathcal{F}^{-1}}{\longleftrightarrow}} \frac{1}{2} [\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0)]$$

et

$$\sin(2\pi\nu_0 x) \stackrel{\mathcal{F}}{\underset{\mathcal{F}^{-1}}{\longleftrightarrow}} \frac{1}{2i} [\delta(\nu - \nu_0) - \delta(\nu + \nu_0)].$$

Fonction porte

Pour la fonction porte de largeur a et hauteur 1

$$\Pi_a(x) = 1, \quad \forall x \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right], \quad 0 \text{ sinon,}$$

on a

$$\Pi_a(x) \stackrel{\mathcal{F}}{\underset{\mathcal{F}^{-1}}{\longleftrightarrow}} a \frac{\sin(\pi a \nu)}{\pi a \nu} = a \operatorname{sinc}(\pi a \nu).$$

Fonction triangle

Pour la fonction triangle Λ_{2a} de largeur $2a$ et de hauteur 1 on a

$$\Lambda_{2a}(x) = \frac{1}{a} \Pi_a(x) \otimes \Pi_a(x) \stackrel{\mathcal{F}}{\underset{\mathcal{F}^{-1}}{\longleftrightarrow}} a \operatorname{sinc}(\pi a \nu)^2.$$

Gaussienne

On a

$$e^{-ax^2} \xleftrightarrow[\mathcal{F}^{-1}]{\mathcal{F}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2 v^2}{a}}.$$

La transformée de Fourier d'une gaussienne d'écart-type

$$\sigma_x = \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

est une gaussienne d'écart-type

$$\sigma_v = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{a}{2}}$$

et on a $\sigma_x \sigma_v = \frac{1}{2\pi}$.

Peigne de Dirac

On a

$$\sqcup\sqcup_T(x) \xleftrightarrow[\mathcal{F}^{-1}]{\mathcal{F}} \frac{1}{T} \sqcup\sqcup_{\frac{1}{T}}(v).$$

La transformée de Fourier d'un peigne de Dirac de période T est un peigne de Dirac de période $\frac{1}{T}$. En effet, la distribution $\sqcup\sqcup_T$ étant périodique de période T , elle se décompose en série de Fourier

$$\sqcup\sqcup_T(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x - kT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2i\pi \frac{n}{T} x}$$

avec

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{2}} e^{-2i\pi \frac{n}{T} x} \sqcup\sqcup_T(x) \, dx \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{2}} e^{-2i\pi \frac{n}{T} x} \delta(x - kT) \, dx \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{2}} e^{-2i\pi \frac{n}{T} x} \delta(x) \, dx = \frac{1}{T} \end{aligned}$$

donc

$$\sqcup\sqcup_T(x) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{2i\pi n x}{T}}$$

puis

$$F(v) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(v - \frac{n}{T}\right) = \frac{1}{T} \sqcup\sqcup_{\frac{1}{T}}(v).$$

3.4.4 Convolution et transformée de Fourier

Si $F(\nu) = \mathcal{F}[f]$ et $G(\nu) = \mathcal{F}[g]$, alors

$$\mathcal{F}[f \otimes g] = F(\nu)G(\nu).$$

En effet

$$\begin{aligned} (f \otimes g)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(x-u) \, du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} G(\nu)e^{2i\pi\nu(x-u)} \, d\nu \right] \, du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} G(\nu)e^{2i\pi\nu x} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-2i\pi\nu u} \, du \right] \, d\nu \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu)G(\nu)e^{2i\pi\nu x} \, d\nu \end{aligned}$$

donc $F(\nu)G(\nu) = \mathcal{F}[f \otimes g]$. On montre de même que $\mathcal{F}[f \times g] = (F \otimes G)(\nu)$.

3.4.5 Conservation de l'énergie : théorème de Parseval

Il y a conservation de l'énergie par transformation de Fourier

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\nu)|^2 \, d\nu.$$

C'est un cas particulier de la formule de Plancherel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g^*(x) \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu)G^*(\nu) \, d\nu.$$

3.5 Énergie, puissance, corrélations

3.5.1 Cas d'un signal

L'énergie totale du signal f est

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\nu)|^2 \, d\nu.$$

Dans la pratique, un facteur de normalisation doit généralement être appliqué pour obtenir une quantité effectivement homogène à une énergie.

Espace réel	Espace de Fourier
$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu)e^{2i\pi\nu x} d\nu$	$F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2i\pi\nu x} dx$
f réelle	$\Re[F]$ paire, $\Im[F]$ impaire
$f(ax)$	$\frac{1}{ a }F(\frac{\nu}{a})$
$f(x - a)$	$e^{-2i\pi\nu a}F(\nu)$
$e^{2i\pi\nu_0 x} f(x)$	$F(\nu - \nu_0)$
$\frac{df}{dx}$	$2i\pi\nu F(\nu)$
$-2i\pi x f(x)$	$\frac{dF}{d\nu}$
$\delta(x)$	1
1	$\delta(\nu)$
$\delta(x - a)$	$e^{-2i\pi a \nu}$
$e^{2i\pi\nu_0 x}$	$\delta(\nu - \nu_0)$
$\Pi_a(x) = \Pi(\frac{x}{a})$	$a \frac{\sin \pi a \nu}{\pi a \nu} = a \operatorname{sinc}(\pi a \nu)$
$\Delta_\nu \operatorname{sinc}(\pi \Delta_\nu x)$	$\Pi_{\Delta_\nu}(x) = \Pi(\frac{x}{\Delta_\nu})$
e^{-ax^2}	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2 \nu^2}{a}}$
$\mathbb{1}_{\mathbb{T}}(x)$	$\frac{1}{T} \mathbb{1}_{\frac{1}{T}}(\nu)$
$(f \otimes g)(x)$	$F(\nu)G(\nu)$
$f(x)g(x)$	$(F \otimes G)(\nu)$

Table 3.1 – Synthèse.

Par définition, $|f(x)|^2$ est la « puissance instantanée » du signal, et $|F(\nu)|^2$ est la Densité Spectrale d'Énergie (DSE), souvent appelée par abus de langage « Densité Spectrale de Puissance » (DSP), ou « spectre de puissance ».

L'autocorrélation du signal est définie par

$$C_f(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)f^*(x - \tau) dx = f(x) \otimes f^*(-x).$$

avec $C_f(\tau)$ homogène à une énergie. En particulier $C_f(0) = E$. L'autocorrélation permet de comparer un signal avec ses versions retardées.

3.5.2 Cas de deux signaux

L'énergie d'interaction de deux signaux f et g est

$$E_{fg} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g^*(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu)G^*(\nu)d\nu.$$

$S_{fg}(\nu) = F(\nu)G^*(\nu)$ est la densité spectrale d'énergie d'interaction. La fonction de corrélation

$$C_{fg}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g^*(x - \tau) dx.$$

permet de comparer $f(x)$ avec $g(x)$.

La transformée de Fourier de la fonction de corrélation C_{fg} est égale à la densité spectrale d'énergie d'interaction $S_{fg}(\nu)$; c'est la relation de Wiener-Khintchine. En effet

$$\begin{aligned} C_{fg}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g^*(x - \tau) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu)G^*(\nu)e^{2i\pi\nu\tau} d\nu \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_{fg}(\nu)e^{2i\pi\nu\tau} d\nu. \end{aligned}$$

Avec le cas particulier $f = g$, on déduit que la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation $C_f(\tau)$ est la DSE $|F(\nu)|^2$.

Chapitre 4

Du continu au discret

4.1 Échantillonnage d'un signal

L'informatique faisant, dans de très nombreux cas ce ne sont plus des signaux analogiques qui sont traités mais des signaux échantillonnés.

4.1.1 Principe

Soit un signal $x(t)$ avec $t \in \mathbb{R}$. L'échantillonnage de x consiste à acquérir des valeurs de x avec une période T_e . Cette opération se modélise en multipliant la fonction x par un peigne de Dirac de période T_e

$$\begin{aligned}x_e(t) &= x(t) \times \coprod_{T_e}(t) \\ &= x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \delta(t - kT_e)\end{aligned}\tag{4.1}$$

avec T_e la période d'échantillonnage et $F_e = \frac{1}{T_e}$ la fréquence d'échantillonnage.

Remarques

- x représente le signal ; c' est une fonction.
- x_e est le signal échantillonné ; c' est une distribution.
- La suite $\{x_k = x(kT_e)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ correspond aux échantillons du signal.

4.1.2 Théorème de Shannon

Sans précautions, l'échantillonnage d'un signal induit une perte d'information. La question est : à quelle condition n'y a-t-il pas de perte d'information en conservant $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ au lieu de x ?

Notons X et X_e les transformées de Fourier de x et x_e . Écrivons l'équation 4.1 dans l'espace de Fourier

$$\begin{aligned} X_e(\nu) &= X(\nu) \otimes F_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\nu - nF_e) \\ &= F_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(\nu) \otimes \delta(\nu - nF_e) \\ &= F_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(\nu - nF_e). \end{aligned} \quad (4.2)$$

L'échantillonnage d'un signal x avec la période T_e a donc pour effet de *périodiser* sa transformée de Fourier X avec la période $F_e = \frac{1}{T_e}$.

Si $|X(\nu)|$ a des valeurs non négligeables pour toutes valeurs de ν , alors, quelle que soit la valeur de T_e , les motifs périodisés de X se recouvriront, et la transformée de Fourier périodisée X_e ne contiendra pas la même information que X . Heureusement, pour les signaux réels, il existe en général une fréquence maximale F_M au-delà de laquelle $|X(\nu)| \simeq 0$, et il suffit de bien choisir T_e .

Théorème d'échantillonnage de (Nyquist-)Shannon : pour que la répétition périodique du spectre d'un signal ne modifie pas le motif répété, il faut et il suffit que la fréquence d'échantillonnage soit strictement supérieure au double de la fréquence maximale contenue dans le signal soit $F_e > 2F_M$.

Si le critère de Shannon $F_e > 2F_M$ n'est pas respecté, on observe un phénomène de repliement spectral (*aliasing*) : il apparaît des fréquences non présentes dans le signal original (appelé effets de moiré pour les images)¹.

4.1.3 Reconstruction du signal

Le spectre X_e du signal échantillonné x_e est périodique de période F_e (équation 4.2). Si le critère de Shannon est respecté, on peut retrouver une période X en multipliant X_e par une fonction porte de largeur F_e

$$X_R(\nu) = \frac{1}{F_e} X_e(\nu) \Pi_{F_e}(\nu) \quad (4.3)$$

Le facteur multiplicatif $1/F_e$ vient du facteur multiplicatif F_e de l'équation 4.2.

1. C'est pour respecter le critère de Shannon que les CD audio utilisent une fréquence d'échantillonnage de 44,1 kHz (la limite de l'audition humaine étant de 20 kHz)

Faisons la transformée de Fourier inverse pour reconstruire le signal de départ dans l'espace réel

$$x_r(t) = \frac{1}{F_e} x_e(t) \otimes F_e \operatorname{sinc}(\pi F_e t) = x_e(t) \otimes \operatorname{sinc}(\pi F_e t). \quad (4.4)$$

Si le critère de Shannon a bien été respecté, l'échantillonnage d'un signal ne fait perdre aucune information, et on obtient exactement $x_r = x$.

Il est possible d'expliciter l'équation 4.4

$$\begin{aligned} x_r(t) &= \left[x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e) \right] \otimes \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi t}{T_e}\right) \\ &= \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \delta(t - kT_e) \right] \otimes \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi t}{T_e}\right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi(t - kT_e)}{T_e}\right). \end{aligned}$$

4.2 Observation à temps fini

En pratique, un signal échantillonné réel ne contient jamais un nombre infini de valeurs. Donc pour que x_e décrive un signal réel, il faut le multiplier par une fonction porte de largeur T

$$\begin{aligned} x_T(t) &= x_e(t) \Pi_T(t), \\ X_T(\nu) &= X_e(\nu) \otimes T \operatorname{sinc}(\pi \nu T). \end{aligned}$$

On a bien sûr intérêt à ce que T soit le plus grand possible. Si $T \rightarrow +\infty$, on a $T \operatorname{sinc}(\pi \nu T) \rightarrow \delta(\nu)$ et donc $X_T(\nu) \rightarrow X(\nu)$.

Le nombre d'échantillons du signal est $N = T/T_e$. Le signal échantillonné s'écrit

$$x_N(t) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \delta(t - kT_e) \quad \text{avec} \quad x_k = x(kT_e) \quad (4.5)$$

où x_N est une distribution dépendant de la variable continue t , non nulle pour $t = kT_e$, avec $k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$. Connaître $x_N(t)$ pour tout t est donc équivalent à connaître la suite $\{x_k\}_{k \in \{0, 1, \dots, N-1\}}$.

La transformée de Fourier de l'équation 4.5 permet d'exprimer la transformée de Fourier de x_N

$$X_N(\nu) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-2i\pi k T_e \nu}. \quad (4.6)$$

4.3 Transformée de Fourier échantillonnée d'un signal échantillonné

La transformée de Fourier X_N exprimée à l'équation 4.6 est une fonction de la variable continue ν . Or les ordinateurs ne peuvent évaluer les transformées de Fourier qu'en un nombre fini de points. Les transformées de Fourier calculées par ordinateurs sont donc échantillonnées

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_N(\nu)\delta(\nu - l\Delta_\nu) \quad (4.7)$$

où Δ_ν est la période d'échantillonnage fréquentiel.

La valeur de Δ_ν doit respecter le critère de Shannon (partie 4.1.2). Échantillonner X_N avec un pas Δ_ν périodise x_N avec une période de $1/\Delta_\nu$. Or avec N échantillons temporels, le support de x_N est $(N-1)T_e$. Il faut donc

$$\frac{1}{\Delta_\nu} > (N-1)T_e.$$

On prend

$$\frac{1}{\Delta_\nu} = NT_e,$$

soit

$$\Delta_\nu = \frac{1}{NT_e} = \frac{F_e}{N}.$$

Par ailleurs, x_e est un signal échantillonné, donc X_N est périodique de période $F_e = 1/T_e$. Le support spectral utile se limite donc à $[0, F_e[$ et il suffit d'échantillonner la première période dans l'équation (4.7) : la somme sur l est prise uniquement de $l_{\min} = 0$ à

$$\begin{aligned} l_{\max} &= \frac{F_e}{\Delta_\nu} - 1 = \frac{1}{T_e\Delta_\nu} - 1 \\ &= N - 1. \end{aligned}$$

On écrit donc finalement

$$\begin{aligned} X_e(\nu) &= \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-2i\pi k T_e \frac{l}{NT_e}} \delta\left(\nu - \frac{lF_e}{N}\right) \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-2i\pi k \frac{l}{N}} \delta\left(\nu - \frac{lF_e}{N}\right) \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} X_l \delta\left(\nu - \frac{lF_e}{N}\right) \end{aligned} \quad (4.8)$$

avec

$$X_l = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-2i\pi k \frac{l}{N}}.$$

Le spectre échantillonné X_e est une distribution périodique dépendant de la variable continue ν qui n'est non nulle que pour $\nu = \frac{lF_c}{N}$, avec $l \in \{0, 1, \dots, N-1\}$. Connaître X_N est donc *équivalent* à connaître la suite $\{X_l\}_{l \in \{0, 1, \dots, N-1\}}$.

4.4 Transformée de Fourier Discrète (TFD)

4.4.1 Définition

Soit les N valeurs réelles d'un signal échantillonné $\{x_k\}_{k \in \{0, 1, \dots, N-1\}}$. Par définition, la transformée de Fourier discrète (TFD) est la suite $\{X_l\}_{l \in \{0, 1, \dots, N-1\}}$ avec

$$X_l = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-2i\pi k \frac{l}{N}}. \quad (4.9)$$

La Transformée de Fourier inverse s'écrit

$$x_k = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} X_l e^{2i\pi k \frac{l}{N}}. \quad (4.10)$$

4.4.2 Commentaires

On a

- $X_0 = \sum_{k=0}^{N-1} x_k$ réel : c'est le terme constant, ou la fréquence nulle,
- X_1 complexe : terme de fréquence $\frac{F_c}{N}$,
- ...
- $X_{\frac{N}{2}}$ réel : terme de fréquence $\frac{N}{2} \frac{F_c}{N} = \frac{F_c}{2}$,
- ...
- X_{N-1} complexe : terme de fréquence $(N-1) \frac{F_c}{N}$.

Puisque les x_k sont tous réels alors X_e est à symétrie hermitienne et $\forall l \in \{0, 1, \dots, N-1\}, X_{N-l} = X_l^*$. La TFD est donc complètement définie avec les échantillons $\{X_0, \dots, X_{N/2}\}$ soit

$$1 + 2 \left(\frac{N}{2} - 1 \right) + 1 = N$$

nombre réels utiles. La TFD permet donc d'étudier le spectre des x_k dans un intervalle de fréquence s'étendant de 0 à $\frac{F_c}{2}$ par pas de $\frac{F_c}{N}$.

On appelle $\frac{F_c}{2}$ la fréquence de Nyquist.

4.4.3 TFD et FFT

Le calcul d'une TFD met en œuvre N^2 multiplications. De nombreux algorithmes ont été développés pour réduire le nombre d'opérations, le plus utilisé étant l'algorithme de Cooley-Tukey. On parle alors de transformée de Fourier rapide (*Fast Fourier Transform* ou FFT).

Une FFT est une TFD. Il est important de noter que, quel que soit l'algorithme effectivement utilisé, les calculs effectués correspondent aux formules 4.9 et 4.10.

Des différences de convention peuvent avoir lieu concernant le sens direct et inverse ou les facteurs de normalisation, 1 et $1/N$, qui sont parfois $1/\sqrt{N}$ dans les deux sens, ou encore non normalisée pour les deux transformations.

4.5 Mise en œuvre pratique d'une TFD

- Une FFT est une transformée de Fourier discrète qui s'applique sur un signal échantillonné. Ce n'est pas une transformée de Fourier au sens mathématique du terme qui est défini pour des fonctions continues (partie 3.4.1).
- Échantillonner un signal avec la période T_e a pour effet
 - éventuellement de faire perdre de l'information si le critère de Shannon n'est pas respecté,
 - de périodiser la transformée de Fourier avec la période $\frac{1}{T_e}$.
- Du fait du nombre limité d'échantillons (N), la transformée de Fourier est convoluée par $\text{sinc}(\pi\nu T)$, avec $T = NT_e$.
- Échantillonner la transformée de Fourier avec la période $\frac{1}{NT_e}$ a pour effet de périodiser le signal avec la période NT_e .

Sur ordinateur, faire des TFD sur des signaux numériques $\{x_k\}_{k \in \{0, \dots, N-1\}}$, pour produire les spectres numériques $\{X_l\}_{l \in \{0, \dots, N-1\}}$, à toujours pour hypothèse implicite que les signaux sont périodiques et observés sur la période $[0, 1]$.

Chapitre 5

Systèmes Linéaires Invariants

5.1 Définitions

Considérons un système physique S soumis à un signal d'entrée e . Il délivre un signal de sortie s et on note $e(t) \rightarrow s(t)$.

Soit $e_1(t) \rightarrow s_1(t)$ et $e_2(t) \rightarrow s_2(t)$, alors le système est *linéaire* si

$$\alpha_1 e_1(t) + \alpha_2 e_2(t) \rightarrow \alpha_1 s_1(t) + \alpha_2 s_2(t),$$

avec $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$.

Soit $e(t) \rightarrow s(t)$ alors le système est *invariant* si

$$e(t - \theta) \rightarrow s(t - \theta)$$

avec $\theta \in \mathbb{R}$ une constante de décalage. Un système linéaire invariant (SLI) vérifie les deux propriétés.

5.2 Relation entrée-sortie d'un SLI

Les propriétés de linéarité et d'invariance du système permettent d'exprimer s à partir de e . Supposons que l'entrée est une impulsion de Dirac $e = \delta$. Par définition, le signal de sortie s'appelle la réponse impulsionnelle h

$$\delta(t) \rightarrow h(t).$$

Appliquons un décalage θ

$$\delta(t - \theta) \rightarrow h(t - \theta)$$

puis un facteur multiplicatif $e(\theta)$

$$e(\theta)\delta(t - \theta) \rightarrow e(\theta)h(t - \theta).$$

On applique la propriété de linéarité et on somme pour tout l'ensemble de valeur possible de θ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e(\theta)\delta(t - \theta)d\theta \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e(\theta)h(t - \theta)d\theta.$$

On obtient finalement

$$e(t) \rightarrow s(t) = (e \otimes h)(t)$$

Propriété fondamentale : La sortie d'un système linéaire invariant est égale au produit de convolution de l'entrée par la réponse impulsionnelle.

Dans l'espace de Fourier on a

$$S(\nu) = E(\nu)H(\nu).$$

Un système linéaire invariant est un filtre. On appelle H la fonction de transfert du système. C'est la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle.

5.3 Exemples de Systèmes Linéaires Invariants

5.3.1 Ouverture circulaire

Considérons un télescope d'ouverture circulaire de diamètre D éclairée par une onde plane monochromatique de longueur d'onde λ . Les sources astrophysiques étant situées à très grandes distances, leur rayonnement observé sur terre est constitué d'ondes planes.

Dans l'approximation de Fraunhofer, la figure de diffraction obtenue à l'infini, appelée communément tache d'Airy, a pour profil radial d'intensité normalisé

$$h(\theta) = \frac{\pi D^2}{4\lambda^2} \left(\frac{2J_1(x)}{x} \right)^2 \quad \text{avec} \quad x = \frac{\pi D\theta}{\lambda},$$

où θ est l'écart angulaire par rapport à l'axe optique et J_1 la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 1. Les fonctions J_n sont des fonctions oscillantes s'amortissant à l'infini. Le premier zéro de la tache d'Airy est obtenu pour $\theta = 1,22 \frac{\lambda}{D}$.

En pratique, la tache d'Airy est l'image d'une étoile, considérée comme une source ponctuelle, car située à de très grandes distances par rapport aux dimensions de l'ouverture. Dans le cas général, l'image obtenue sera le produit de convolution de l'image d'entrée par la tache d'Airy.

5.3.2 Système linéaire intégrateur parfait

Par définition

$$s(t) = \int_{-\infty}^t e(t) dt.$$

La réponse impulsionnelle s'obtient en posant $e(t) = \delta(t)$

$$h(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t) dt = \int_{-\infty}^t U'(t) dt = U(t).$$

La réponse impulsionnelle d'un système linéaire intégrateur parfait est égale à l'échelon unité U (fonction de Heaviside, équation 3.1).

5.3.3 Système linéaire dérivateur parfait

Par définition

$$s(t) = \frac{de}{dt}$$

donc

$$h(t) = \frac{d\delta}{dt}.$$

5.3.4 Circuit RC intégrateur

Considérons un circuit RC , et notons x la tension d'entrée aux bornes du circuit et y la tension de sortie aux bornes du condensateur. En notant l'intensité circulant I la charge instantanée dans le condensateur Q , on a

$$I = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dy}{dt} = \frac{x - y}{R}$$

donc

$$\frac{dy}{dt} + \frac{y}{RC} = \frac{x}{RC}.$$

On obtient donc une équation différentielle linéaire à coefficients constants. Le circuit RC forme bien un système linéaire invariant.

Pour exprimer sa réponse impulsionnelle h on pose $x = \delta$

$$\frac{dh}{dt} + \frac{h}{RC} = \frac{\delta}{RC}.$$

En appliquant la transformée de Fourier

$$2i\pi\nu H(\nu) + \frac{H(\nu)}{RC} = \frac{1}{RC}$$

on obtient

$$H(\nu) = \frac{1}{1 + 2i\pi RC\nu}.$$

On sait que

$$U(t)e^{-\frac{t}{\tau}} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\tau}{1 + 2i\pi\nu\tau}$$

avec U l'échelon unité, donc la réponse impulsionnelle est

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} U(t)$$

à comparer avec un intégrateur parfait.

5.3.5 Circuits RC dérivateur

Considérons à nouveau un circuit RC , et notons x la tension d'entrée aux bornes du circuit et y la tension de sortie aux bornes de la résistance R . Avec les mêmes notations on a

$$I = \frac{dQ}{dt} = C \frac{d(x - y)}{dt}$$

donc

$$\frac{dy}{dt} + \frac{y}{RC} = \frac{dx}{dt}.$$

On obtient à nouveau une équation différentielle linéaire à coefficients constants, donc le circuit RC forme bien un système linéaire invariant.

Pour exprimer sa réponse impulsionnelle h , on pose $x(t) = \delta$

$$\frac{dh}{dt} + \frac{h}{RC} = \frac{d\delta}{dt}$$

et par transformation de Fourier

$$2i\pi\nu H(\nu) + \frac{H(\nu)}{RC} = 2i\pi\nu$$

on obtient

$$H(\nu) = \frac{2i\pi RC\nu}{1 + 2i\pi RC\nu} = 1 - \frac{1}{1 + 2i\pi RC\nu}.$$

On en déduit la réponse impulsionnelle

$$h(t) = \delta(t) - \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} U(t)$$

à comparer un dérivateur parfait.

5.4 Principe de causalité

Pour des signaux ne dépendant que du temps, la réponse impulsionnelle vérifie le principe de causalité : l'effet ne précède pas la cause.

Notons h la réponse à une impulsion $\delta(t)$ à $t = 0$. On a forcément

$$h(t) = 0, \forall t < 0.$$

On parle alors de système physiquement réalisable, ou causal.

On a alors

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-u)e(u) du \\ &= \int_{-\infty}^t h(t-u)e(u) du. \end{aligned}$$

La sortie $s(t)$ n'est construite qu'à partir des valeurs passées de l'entrée.

5.5 Fonctions propres d'un système linéaire invariant

Appliquons un signal sinusoïdal de fréquence ν

$$e_\nu(t) = Ae^{2i\pi\nu t}$$

à l'entrée d'un SLI de réponse impulsionnelle $h(t)$. Le signal de sortie s'écrit

$$\begin{aligned} s_\nu(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-u)e_\nu(u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} e_\nu(t-u)h(u) du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{2i\pi\nu(t-u)}h(u) du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\nu u}h(u) du Ae^{2i\pi\nu t} \\ &= H(\nu)e_\nu(t). \end{aligned}$$

Donc s_ν est *proportionnel* à e_ν : les fonctions e_ν sont les *fonctions propres* des systèmes linéaires invariants.

Le facteur de proportionnalité, $H(\nu)$, dépend de la fréquence ν . C'est la fonction de transfert du système, transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle h . La fonction de transfert H est *a priori* à valeurs complexes, donc la sortie s_ν est une sinusoïde à la *même fréquence*, mais avec une amplitude et une phase *différente*.

Conséquences

Considérons un signal quelconque x à l'entrée d'un système linéaire invariant de réponse impulsionnel h .

- S'il est périodique de période T , x se décompose en série de Fourier (partie 3.3), et on a

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2i\pi n\nu_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e_{n\nu_0}(t)$$

avec $\nu_0 = 1/T$ et

$$e_{n\nu_0}(t) = c_n e^{2i\pi n\nu_0 t}.$$

Par linéarité et invariance du système, le signal de sortie est

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_{n\nu_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H(n\nu_0) e_{n\nu_0}(t). \quad (5.1)$$

- S'il n'est pas périodique, x admet une transformée de Fourier X (partie 3.4.1), et on a

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} e_\nu(t) d\nu$$

avec

$$e_\nu(t) = X(\nu) e^{2i\pi\nu t}.$$

De même on a

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_\nu(t) d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\nu) e_\nu(t) d\nu. \quad (5.2)$$

Les calculs correspondants aux équations 5.1 et 5.2 sont beaucoup plus simples à mener que des produits de convolution. On comprend bien l'intérêt des séries et transformées de Fourier : elles permettent de décomposer tout signal comme une somme, discrète ou continue, de fonctions propres de systèmes linéaires invariants.

Chapitre 6

Filtrages

Les techniques de filtrage sont très utilisées pour l'analyse des signaux, quand on souhaite en particulier limiter les informations indésirables ou extraire l'information pertinente. Nous décrivons dans ce chapitre les principes du filtrage des signaux analogiques.

6.1 Apodisation : filtrage dans l'espace réel

6.1.1 Principe

Considérons un signal quelconque x dépendant d'une variable réelle t . Le filtrage possible consiste à sélectionner une certaine tranche de signal, entre $t = t_1$ et $t = t_2$. On obtient donc le signal y

$$y(t) = \begin{cases} x(t) & \text{si } t \in [t_1, t_2], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On dit que le signal x est « apodisé » (= on a coupé ses pieds). Concrètement, x est multipliée par une « fenêtre d'apodisation » ou « fenêtre de pondération » f qui est ici une fonction porte

$$f(t) = \Pi_{\Delta}(t - t_0) \quad \text{avec} \quad \Delta = t_2 - t_1 \quad \text{et} \quad t_0 = \frac{t_1 + t_2}{2}.$$

Le filtrage s'écrit comme une multiplication

$$y(t) = x(t) \times f(t).$$

Il se traduit donc par une convolution dans l'espace dual

$$Y(v) = X(t) \otimes F(v).$$

Le spectre du signal de départ est donc inévitablement modifié.

6.1.2 Exemples

Prenons un signal sinusoïdal de fréquence ν_0 apodisé par une fonction porte de largeur Δ et centrée sur t_0

$$x(t) = A \cos(2\pi\nu_0 t)$$

$$f(t) = \Pi_{\Delta}(t - t_0) = \Pi\left(\frac{t - t_0}{\Delta}\right).$$

On a dans l'espace de Fourier

$$X(\nu) = \frac{A}{2} [\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0)]$$

$$F(\nu) = \Delta \operatorname{sinc}(\pi\Delta\nu) e^{-2i\pi t_0 \nu} \tag{6.1}$$

$$Y(\nu) = X(\nu) \otimes F(\nu).$$

Le premier zéro de la fonction sinus cardinal est atteint pour $\nu = 1/\Delta$.

- Comment s'assurer que l'allure du spectre de Y ne soit pas sensiblement différent de celui de X ?
- Quelle serait la valeur minimale pour Δ avec $\nu_0 = 20 \text{ Hz}$?
- Que se passe-t-il si x n'est pas une sinusoïde pure, mais contient des harmoniques de fréquences $\nu_0, 2\nu_0, \dots$?

Faisons $\Delta \rightarrow 0$. On a alors

$$F(\nu) \rightarrow \Delta e^{-2i\pi t_0 \nu}$$

$$f(t) \rightarrow \Delta \delta(t - t_0)$$

$$y(t) \rightarrow x(t_0) \Delta \delta(t - t_0)$$

et donc

$$Y(\nu) \rightarrow \frac{A}{2} [\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0)] \otimes \Delta e^{-2i\pi t_0 \nu}$$

$$\rightarrow \frac{A\Delta}{2} [e^{-2i\pi t_0(\nu - \nu_0)} + e^{-2i\pi t_0(\nu + \nu_0)}]$$

$$\rightarrow \frac{A\Delta}{2} e^{-2i\pi t_0 \nu} [e^{2i\pi t_0 \nu_0} + e^{-2i\pi t_0 \nu_0}].$$

Le module de Y devient constant, alors que le spectre du signal de départ, X , est constitué de deux distributions de Dirac équation 6.1. Le signal y tend vers une distribution de Dirac, alors que x est un sinus de fréquence ν_0 .

En d'autres termes, une apodisation dans l'espace réel n'est une opération ni anodine ni neutre ; elle a des conséquences parfois importantes sur le spectre du signal.

6.2 Filtrage dans l'espace de Fourier

Un filtrage dans l'espace de Fourier est une multiplication. Il se traduit par une convolution dans l'espace réel.

Un système linéaire invariant de réponse impulsionnelle h (ou de fonction de transfert H) est un filtre fréquentiel, et on a

$$\begin{aligned} Y(\nu) &= X(\nu) \times H(\nu), \\ y(t) &= x(t) \otimes h(t). \end{aligned}$$

où x est le signal d'entrée et y le signal de sortie.

La fonction de transfert H est complexe

$$H(\nu) = |H(\nu)|e^{i\phi(\nu)}$$

avec $|H|$ le *gain* du filtre et ϕ le *déphasage*.

6.2.1 Filtrage idéal

Un filtre est dit « idéal » si sa fonction de transfert est constante à l'intérieur d'une certaine bande, et nulle à l'extérieur de celle-ci.

Filtre passe-bas

C'est un porte fréquentielle de largeur a

$$\begin{aligned} H(\nu) &= \Pi_a(\nu), \\ h(t) &= a \operatorname{sinc}(\pi at). \end{aligned}$$

Filtre passe-haut

C'est

$$\begin{aligned} H(\nu) &= 1 - \Pi_a(\nu), \\ h(t) &= \delta(t) - a \operatorname{sinc}(\pi at). \end{aligned}$$

On note $F_c = \frac{a}{2}$ la fréquence de coupure du filtre.

Filtre passe-bande centré

C'est une porte de largeur a centrée en ν_0

$$\begin{aligned} H(\nu) &= \Pi_a(\nu - \nu_0), \\ h(t) &= a \operatorname{sinc}(\pi at)e^{2i\pi\nu_0 t}. \end{aligned}$$

6.2.2 Réalisation pratique

Pour les signaux analogiques, les filtres sont composés de résistances, de condensateurs, de bobines et d'amplificateurs opérationnels. Ils ne peuvent pas être « idéaux » et sont en particulier nécessairement *causaux*.

Filtres passe-bas du premier ordre

Le RC intégrateur (voir partie 5.3.4) a pour fonction de transfert

$$H(\nu) = \frac{1}{1 + 2i\pi RC\nu} = \frac{K}{1 + i\frac{\nu}{\nu_c}} \quad \text{avec} \quad \nu_c = \frac{1}{2\pi RC}, \quad K = 1.$$

Le gain vaut

$$|H(\nu)| = K \sqrt{\frac{\nu_c^2}{\nu_c^2 + \nu^2}}.$$

Le gain (en décibels) et la phase du filtre s'écrivent

$$G(\nu) = 20 \log |H(\nu)| = 20 \log K - 10 \log \left(1 + \frac{\nu^2}{\nu_c^2} \right),$$

$$\phi(\nu) = -\arctan \left(\frac{\nu}{\nu_c} \right).$$

Par définition, ν_c est la fréquence de coupure du filtre, et on a

$$|H(\nu_c)| = \frac{|H(0)|}{\sqrt{2}}, \quad G(\nu_c) - G(0) = -3\text{dB},$$

$$FWHM = 2\sqrt{3}\nu_c, \quad \phi(\nu_c) = -\frac{\pi}{4}.$$

Filtres passe-haut du premier ordre

De même, le circuit RC dérivateur (voir partie 5.3.5) est un filtre passe-haut du premier ordre

$$H(\nu) = \frac{2i\pi RC\nu}{1 + 2i\pi RC\nu} = \frac{Ki\frac{\nu}{\nu_c}}{1 + i\frac{\nu}{\nu_c}} \quad \text{avec} \quad \nu_c = \frac{1}{2\pi RC}, \quad K = 1.$$

Le gain vaut

$$|H(\nu)| = K \sqrt{\frac{\nu^2}{\nu_c^2 + \nu^2}}.$$

Par définition, ν_c est la fréquence de coupure du filtre, et on a

$$G(\nu) = 20 \log K - 10 \log \left(1 + \frac{\nu^2}{\nu_c^2} \right) \quad \text{avec} \quad G(\nu_c) = -3 \text{ dB},$$

$$\phi(\nu) = \frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{\nu}{\nu_c} \right).$$

Filtres d'ordre supérieur

Des circuits RLC permettent de réaliser des filtres passe-bas et passe-haut d'ordre deux. Les filtres d'ordre quelconque sont réalisés en associant des filtres d'ordre 1 et d'ordre 2.

Filtres passe-bandes

Les filtres passe-bas et passe-haut que nous venons de présenter peuvent être combinés entre eux pour réaliser des filtres passe-bandes.

Diagrammes de Bode

Pour un filtre donné, les tracés de $G(\nu)$ en décibels et $\phi(\nu)$ en fonction de $\log(\nu)$ constituent le diagramme de Bode. C'est une représentation très utilisée pour visualiser les caractéristiques d'un filtre.

6.3 Calibration de fonctions de transfert inconnues

Nous avons vu qu'un filtre fréquentiel est un système linéaire invariant. Si on applique à l'entrée du filtre un signal sinusoïdal de fréquence ν

$$e_\nu(t) = Ae^{2i\pi\nu t}$$

le signal de sortie s'écrira (voir partie 5.5)

$$s_\nu(t) = H(\nu)e_\nu(t).$$

En appliquant à l'entrée du filtre un générateur de signaux sinusoïdaux, il est possible de mesurer la fonction de transfert du filtre

$$|H| = \frac{A_{\text{sortie}}}{A_{\text{entrée}}} \quad \text{et} \quad \phi = \phi_{\text{sortie}} - \phi_{\text{entrée}}.$$

6.4 Filtres à déphasage linéaire

Soit le filtre fréquentiel de fonction de transfert

$$H(\nu) = e^{-2i\pi\nu t_0} \quad \text{avec} \quad t_0 \in \mathbb{R}^+.$$

La phase $\phi(\nu)$ de ce filtre varie linéairement avec ν . La réponse impulsionnelle correspondante est $h(t) = \delta(t - t_0)$ donc

$$y(t) = x(t - t_0).$$

Un filtre à déphasage linéaire permet de translater un signal.

6.5 Fenêtres de convolution réalisables

Pour des signaux analogiques, on doit utiliser des filtres physiquement réalisables qui imposent dans une certaine mesure la forme précise du filtre fréquentiel, et donc de la fenêtre de convolution dans l'espace réel.

Pour des signaux numériques, on peut faire a priori ce qu'on veut. Mais attention, les filtres ont tous des effets très précis dans l'espace réel et dans l'espace de Fourier qui doivent être parfaitement maîtrisés.

On considèrera dans la suite uniquement des fenêtres passe-bas, les fenêtres passe-haut ou passe-bande pouvant se construire facilement à partir de fenêtres passe-bas.

Les fenêtres de convolution sont données avec des facteurs de normalisation pour que leur intégrale soit égale à 1. La convolution d'un signal constant par des fenêtres ainsi normalisées redonnera le même signal constant.

6.5.1 Fonction porte

C'est la fenêtre la plus simple

$$f(t) = \frac{1}{a} \Pi\left(\frac{t}{a}\right) \xleftrightarrow[\mathcal{F}^{-1}]{\mathcal{F}} F(\nu) = \text{sinc}(\pi a \nu) = P_a(\nu).$$

Son principal défaut est de générer des oscillations dans l'espace de Fourier puisque

$$P_a(\nu) = 0 \quad \text{pour} \quad \nu = \frac{k}{a}$$

avec k est un nombre entier non nul. De nombreuses fenêtres d'apodisation ont donc été conçues pour réduire ces oscillations.

6.5.2 Fenêtre de Bartlett

La fonction triangle a été proposée en 1948 par Maurice Stevenson BARTLETT

$$f(t) = \frac{2}{a} \Lambda_a(t) = \frac{4}{a^2} \Pi_{\frac{a}{2}}(t) \otimes \Pi_{\frac{a}{2}}(t) \xleftrightarrow[\mathcal{F}^{-1}]{\mathcal{F}} F(\nu) = \text{sinc}\left(\pi \frac{a}{2} \nu\right)^2.$$

Par rapport à $P_a(\nu)$, l'écart entre le maximum et le premier zéro est doublé, et l'amplitude des oscillations largement réduite.

6.5.3 Fenêtre de Hann

Proposée par J. VAN HANN (on l'appelle souvent « fenêtre de Hanning »)

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{a} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi t}{a}\right)\right), & \text{si } t \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right], \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On obtient

$$\begin{aligned} F(\nu) &= \frac{1}{a} P_a(\nu) + \frac{1}{2a} \left[P_a(\nu) \otimes \delta\left(\nu - \frac{1}{a}\right) + P_a(\nu) \otimes \delta\left(\nu + \frac{1}{a}\right) \right] \\ &= \frac{1}{a} P_a(\nu) + \frac{1}{2a} \left[P_a\left(\nu - \frac{1}{a}\right) + P_a\left(\nu + \frac{1}{a}\right) \right]. \end{aligned}$$

Les oscillations de $P_a(\nu)$ et de $P_a(\nu \pm 1/a)$ sont en opposition de phase. On obtient une fonction de transfert $F(\nu)$ dont l'amplitude des oscillations est fortement réduite par rapport à celles de $P_a(\nu)$ seule.

6.5.4 Fenêtre de Hamming

Richard Wesley HAMMING a amélioré la fenêtre de Hanning

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2}{a} \left(0,54 + 0,46 \cos\left(\frac{2\pi t}{a}\right)\right), & \text{si } t \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right], \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On obtient

$$F(\nu) = \frac{2}{a} \left[0,54 P_a(\nu) + 0,23 P_a\left(\nu - \frac{1}{a}\right) + 0,23 P_a\left(\nu + \frac{1}{a}\right) \right].$$

6.5.5 Fenêtre de Blackman

Elle a été proposée par R.B. BLACKMAN en 1958

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2}{a} \left(0,42 + 0,5 \cos\left(\frac{2\pi t}{a}\right) + 0,08 \cos\left(\frac{4\pi t}{a}\right) \right), & \text{si } t \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right], \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On obtient

$$F(\nu) = \frac{2}{a} \left[0,42 P_a(\nu) + 0,25 \left(P_a\left(\nu - \frac{1}{a}\right) + P_a\left(\nu + \frac{1}{a}\right) \right) + 0,04 \left(P_a\left(\nu - \frac{2}{a}\right) + P_a\left(\nu + \frac{2}{a}\right) \right) \right].$$

6.5.6 Caractéristiques des fenêtres

L'atténuation d'un filtre de fonction de transfert $F(\nu)$ est

$$A(\nu) = -20 \log \frac{|F(\nu)|}{|F(0)|} = -(G(\nu) - G(0))$$

La largeur à mi-hauteur est

$$FWHM = \nu_2 - \nu_1 \quad \text{tel que} \quad |F(\nu_2)| = |F(\nu_1)| = \frac{1}{2}|F(0)|.$$

Fenêtres	FWHM	1 ^{er} zéro	Atténuation du 1 ^{er} lobe (dB)
Porte	$1,2/a$	$1/a$	30
Bartlett	$1,78/a$	$2/a$	60
Hanning	$2/a$	$2/a$	70
Hamming	$1,82/a$	$2/a$	100
Blackman	$2,22/a$	$3/a$	135

Table 6.1 – Caractéristiques des fenêtres.